Mécanique

MODELISATION DES ACTIONS MECANIQUES

Référence au programme S.T.I

1- Modélisation des liaisons et des actions mécaniques.
1-2 Modélisations des actions mécaniques

Référence au module

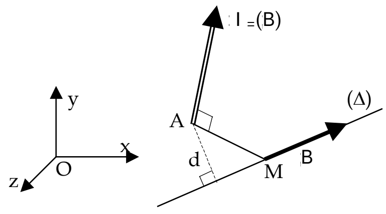
Module ***2 :*** :modélisation des Actions Mécaniques

$$\{\tau_{(1\rightarrow2)}\} = {}_A\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{R_{(1\rightarrow2)}} = \sum_{i=1}^{i=n}\overrightarrow{F_i} = \overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\ldots+\overrightarrow{F_n} \\ \overrightarrow{M_A(\overrightarrow{R_{1\rightarrow2)}})} = \sum_{i=1}^{i=n}\overrightarrow{AP_i}\wedge\overrightarrow{F_i} = \overrightarrow{AP_1}\wedge\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{AP_2}\wedge\overrightarrow{F_2}+\ldots.+\overrightarrow{AP_n}\wedge\overrightarrow{F_n} \end{array}\right\}_B$$

1- Objectifs de la séquence :

Définir *la notion d'action mécanique,*
Définir *la notion de vecteur force,*
Définir *la notion de vecteur moment,*
Modéliser *les actions mécaniques de contact,*
Modéliser *les actions mécaniques à distance.*

$$\{T_{pesanteur\rightarrow S}\} = {}_G\left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -m.g & 0 \end{array}\right\}_R$$



2- Situation pédagogique :

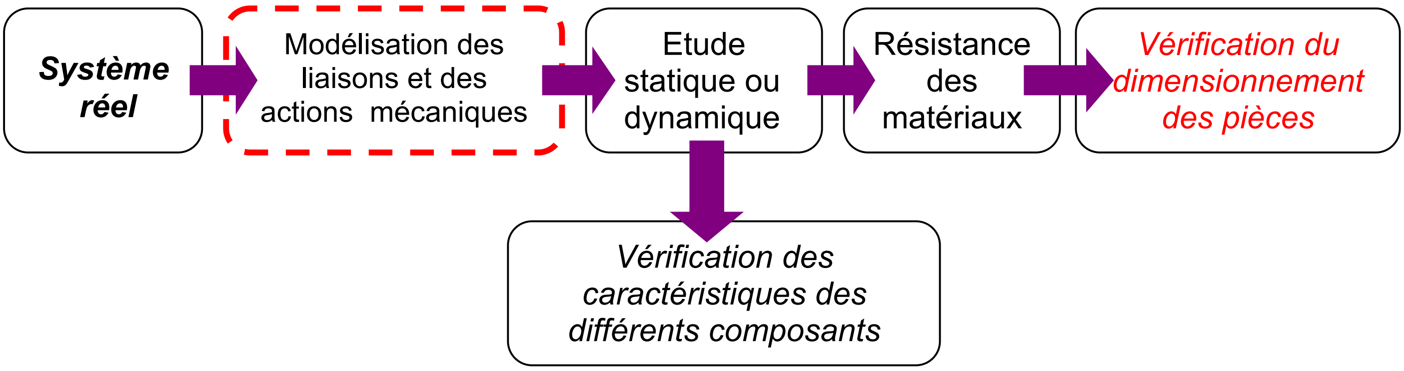
prérequis Géométrie vectorielle.

connaissances visées Modélisation d'une action mécanique.

nature de la démarche Acquisition de connaissances.

à savoir **Modéliser** les actions subies par le système.

PREAMBULE :



Le but de ce cours est de choisir une représentation mathématique des actions mécaniques, d'étudier l'action mécanique de la pesanteur et de définir les efforts que peuvent transmettre les liaisons, afin par la suite, de procéder à leur dimensionnement.

1. DEFINITION D'UNE ACTION MECANIQUE

D'une façon générale, on appelle action mécanique (notée A.M.) ***toute cause physique susceptible de maintenir un corps au repos, de créer, de maintenir ou de modifier un mouvement, de déformer un corps.***

2. CLASSIFICATION DES ACTIONS MECANIQUES

Les actions mécaniques sont de deux sortes :

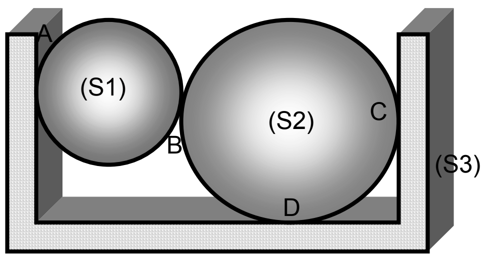
- Les ***actions mécaniques à distance*** (champ de pesanteur, champ électromagnétique)

- Les ***actions mécaniques de contact*** (liaisons surfaciques…)

On distingue les actions mécaniques ***extérieures*** et ***intérieures*** à un ensemble de corps.

Application :

Soient 3 corps (S_1), (S_2), (S_3) et (E) l'ensemble constitué par les 2 corps (S_1) et (S_2).
- l'action mécanique de (S3) sur (S2) est ***extérieure*** à (E).
- l'action mécanique de (S1) sur (S2) est ***intérieure*** à (E).

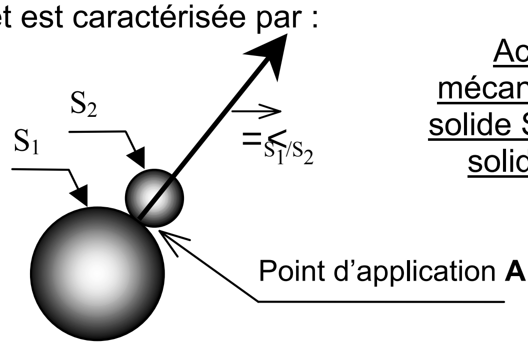


3. LE TORSEUR D'ACTION MECANIQUE
3.1. Notion de force

Une Force est une action mécanique représentée par un vecteur lié.

Une force est toujours appliquée en un point et est caractérisée par :

- Un ***point d'application*** ;
- Une ***direction*** ;
- Un ***sens*** ;
- Une ***norme*** (en NEWTON [N]).



Action mécanique du solide S1 sur le solide S2.

3.2. Notion de moment

La notion de vecteur lié est insuffisante à elle seule pour représenter complètement toutes les actions mécaniques.
On est amené à introduire la notion de moment de la force par rapport à un point.

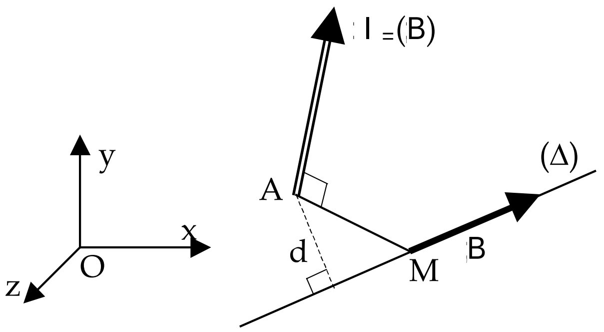
3.2.1. Moment d'une force par rapport à un point

Les effets physiques d'une A.M. dépendent de la position et de l'orientation dans l'espace de la force F associée à cette A.M.

On appelle moment par rapport au point A de la force $F_{1/2}$ appliquée au point M, le vecteur d'origine A défini par la relation :

$$\boxed{\overrightarrow{M_A(\vec{F}_{1/2})} = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}_{1/2}}$$

Unité : Newton-mètre (N.m)



3.2.2. Autre formule : « Bras de levier »

$$\boxed{\| M_A(F_{1/2}) \| = d.\ \| F_{1/2} \|}$$

3.2.3. Relation fondamentale sur les moments

Soit $\vec{F}_{1/2}$ une force appliquée en M, et deux points quelconques A et B :

$$\boxed{\overrightarrow{M_B(\vec{F}_{1/2})} = \overrightarrow{BM} \wedge \vec{F}_{1/2}} \qquad \boxed{\overrightarrow{M_A(\vec{F}_{1/2})} = \overrightarrow{M_B(\vec{F}_{1/2})} + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}_{1/2}}$$

3.3. Torseur d'Action Mécanique

Toute action mécanique est entièrement caractérisée, d'un point de vue mécanique, par un torseur.

Le torseur représentant l'action mécanique de S1 sur S2 s'écrit :

$$\boxed{\{T_{(S1/S2)}\} = {}_B\left\{ \begin{matrix} \vec{R}(S1/S2) \\ \vec{M}_B(S1/S2) \end{matrix} \right\}_R = {}_B\left\{ \begin{matrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{matrix} \right\}_R}$$

Repère de projection

Point de réduction

Remarque :

$R_{(ext \to 1)}$ et $M_{B\ (ext \to 1)}$ sont appelés ***éléments de réduction*** du torseur $\{T_{(S1/S2)}\}$;

3.4. Actions mécaniques particulières

3.4.1. Torseur glisseur

On appelle ***torseur glisseur***, tout torseur associé à une action mécanique dont le moment est nul en un point.

$$\{T_{(ext\rightarrow 1)}\} = {}_A\left\{\begin{array}{c}\vec{R}(ext\rightarrow 1)\neq\vec{0}\\ \vec{M}_A(ext\rightarrow 1)=\vec{0}\end{array}\right\}_R$$

<u>Remarque</u> : les éléments de réduction d'un torseur GLISSEUR sont les mêmes en tout point appartenant au support de la résultante.

3.4.2. Torseur couple

On appelle ***torseur couple***, tout torseur associé à une action mécanique dont la résultante est nulle.

$$\{T_{(ext\rightarrow 1)}\} = {}_A\left\{\begin{array}{c}\vec{0}\\ \vec{M}_A(ext\rightarrow 1)\neq\vec{0}\end{array}\right\}_R$$

<u>Remarque</u> : les éléments de réduction d'un torseur COUPLE sont les mêmes en tout point.

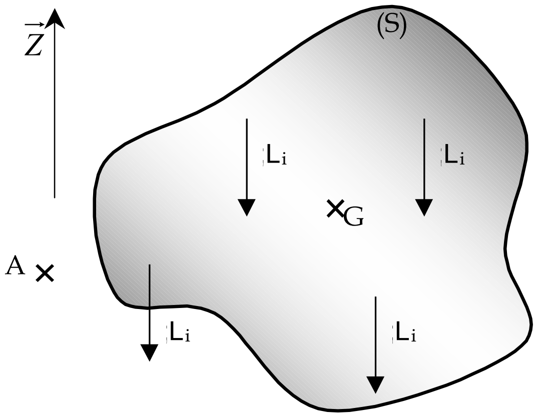
4. MODELISATION DES ACTIONS A DISTANCE

4.1. Définition

L'action mécanique de 1 sur 2 est dite « à distance », si elle ne résulte pas d'une liaison mécanique entre 1 et 2.

4.2. Cas du champ de pesanteur

<u>- en un point quelconque A :</u>



$$\{T_{pesanteur\rightarrow S}\} = {}_A\left\{\begin{array}{c}\vec{R}_{(pes\rightarrow S)}=\sum_{i=1}^{n}\vec{p_i}=\vec{P}\\ \vec{M}_{G(pes\rightarrow S)}=\sum_{i=1}^{n}(\vec{AM_i}\times\vec{p_i})\end{array}\right\}_R$$

<u>- au centre de ***gravité*** G :</u>

$$\{T_{(pes\rightarrow S)}\} = {}_G\left\{\begin{array}{c}\vec{R}(pes\rightarrow S)=\vec{P}\\ \vec{M}_G(pes\rightarrow S)=\vec{0}\end{array}\right\}_R \text{ soit } \boxed{\{T_{pesanteur\rightarrow S}\} = {}_G\left\{\begin{array}{cc}0 & 0\\ 0 & 0\\ -m.g & 0\end{array}\right\}_R}$$

m : masse du solide en kilogramme (kg)

g : représente l'accélération du champ de pesanteur.

A Paris, au niveau du sol <u>$g = 9{,}81\ m.s^{-2}$</u>

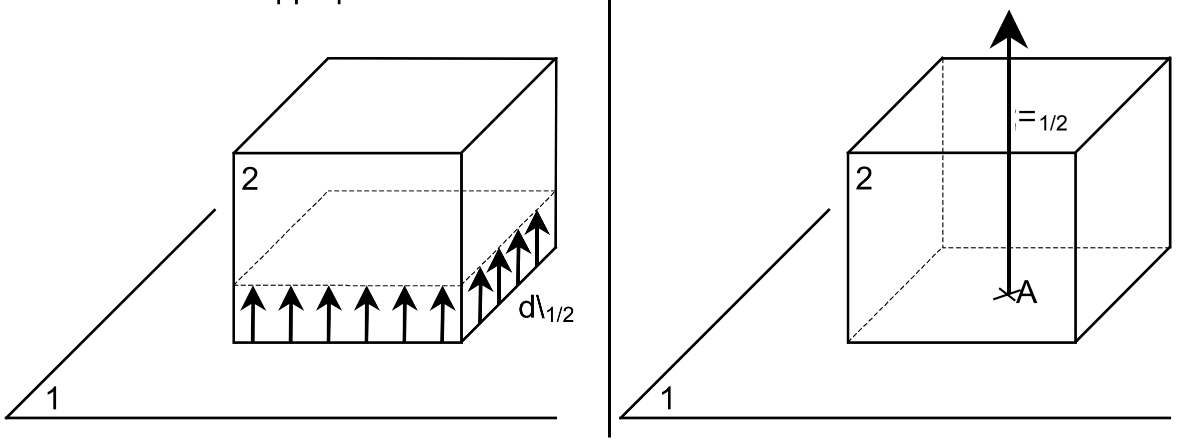
Par conséquent, entre la masse et le poids de (S) il existe la relation P=m.g

5. MODELISATION DES ACTIONS MECANIQUES DE CONTACT

Tout contact réel entre deux corps a lieu suivant une surface, aussi petite soit elle.

5.1. Action de surface entre deux solides *(SANS FROTTEMENT)*

Actions réelles appliquées de 1 sur 2	Modélisation de ces actions

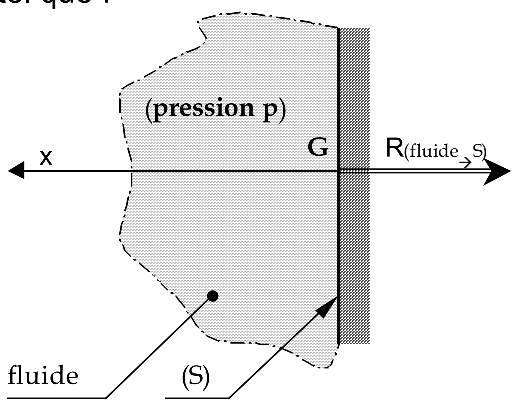


L'action mécanique de contact surfacique est modélisable par un vecteur $A_{1/2}$:

- Point d'application : ***A***,
- Direction : ***perpendiculaire*** au ***plan tangent*** commun,
- Sens : ***de 1 vers 2***,
- Intensité : $\|\overrightarrow{A_{1/2}}\| = \sum df_{1/2}$

5.2. Action mécanique due à la pression d'un fluide sur une surface plane

Les actions mécaniques de contact d'un fluide sur une surface plane (S) peuvent se modéliser par un torseur d'action mécanique au centre G de la surface (S) tel que :



$$\{T_{fluide \to S}\} = {}_{G}\begin{Bmatrix} \vec{R}(f \to S) = -p.S.\vec{x} \\ \vec{M}_{G}(f \to S) = \vec{0} \end{Bmatrix}_{R}$$

avec :

- **P :** pression du fluide, exercée sur la surface (S). Cette pression est supposée uniforme ;
- **S :** aire de (S),
- **x :** normale extérieure à la paroi

Pression : P en méga-pascal (Mpa), Surface : S en mm²

à connaître : 1 MPa = 10^6 Pa = 1 N/mm² = 10 bars

6. ACTION TRANSMISSIBLE PAR UNE LIAISON PARFAITE

Soient 1 et 2 deux solides en contact.

6.1. Hypothèses

Une liaison parfaite entre deux solides 1 et 2 est caractérisée par :

- Des ***surfaces*** de liaison ***géométriquement parfaites*** et ***indéformables*** ;
- Des ajustements ***sans jeu*** ;
- Des contacts ***sans frottement***.

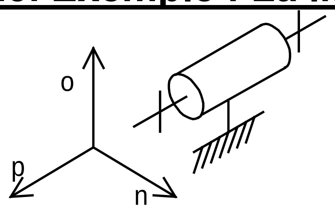
6.2. Relation avec les degrés de liberté d'une liaison

Les mouvements possibles du solide 2 par rapport au solide 1 sont notés R_x, R_y et R_z (rotations) et T_x, T_y et T_z (translations).

Si un mouvement (rotation ou translation) est possible suivant un axe, alors il n'y a pas de composante d'effort (respectivement couple ou force) transmissible suivant cet axe.

NB : La liaison glissière hélicoïdale est une exception.

6.3. Exemple : La liaison pivot



Mobilités

$T_x = 0$	$R_x = 0$
$T_y = 0$	$R_y = 0$
$T_z = 0$	$R_z = 1$

Action transmissible

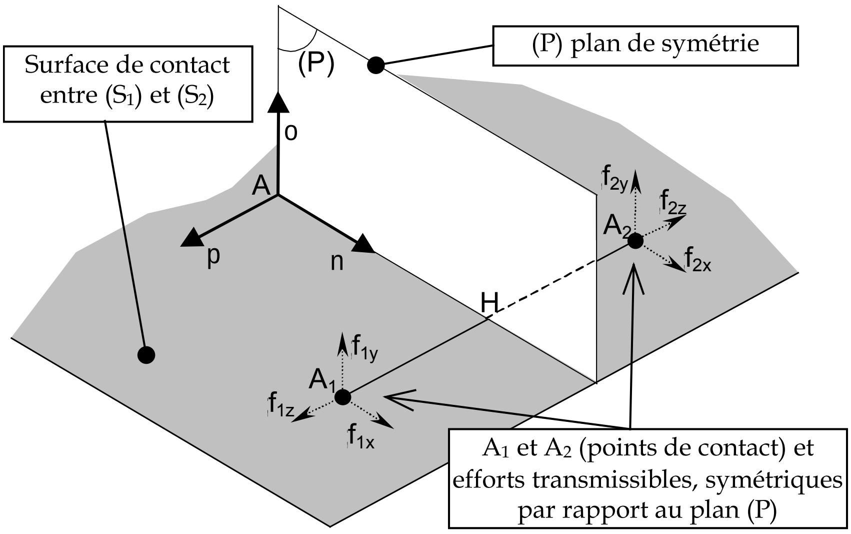
(force)	(couple)
$X \neq 0$	$L \neq 0$
$Y \neq 0$	$M \neq 0$
$Z \neq 0$	$N = 0$

6.4. Applications :

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

7. MODELISATION PLANE DES ACTIONS MECANIQUES

Dans certains cas, l'étude du mécanisme dans l'espace peut être délicate. On recherche alors une possibilité de réduire l'étude à un problème plan, sous certaines hypothèses.



7.1. Hypothèses

- La surface de contact a une géométrie et des actions transmissibles qui présentent une symétrie par rapport à un plan ;
- On choisit alors un repère local dont les axes sont confondus avec les axes de symétrie de la liaison.

7.2. Simplification

Lorsque les hypothèses sont réunies, l'écriture du torseur d'action mécanique transmissible par la liaison se simplifie. IL subsistent alors :

- ***La composante du moment*** portée par l'axe perpendiculaire au plan de symétrie.
- ***Les composantes de la résultante*** contenues dans le plan de symétrie.

Dans notre exemple, le plan de symétrie est $(A,\vec{x},\vec{y})$, le torseur en A associé aux efforts transmissibles par cette liaison a la forme :

Forme générale : | Simplification : | Forme simplifiée :

$$\{\mathcal{T}_{(S2/S1)}\} = \begin{Bmatrix} X_{21} & L \\ Y_{21} & M \\ Z_{21} & N \end{Bmatrix}_{A,R} \qquad \begin{Bmatrix} X_{21} & \cancel{L_A} \\ Y_{21} & \cancel{M_A} \\ \cancel{Z_{21}} & N_A \end{Bmatrix} \qquad {}_A\begin{Bmatrix} X_{21} & 0 \\ Y_{21} & 0 \\ 0 & N_A \end{Bmatrix}_{\vec{x},\vec{y}}$$

(6 inconnues) | (3 inconnues)

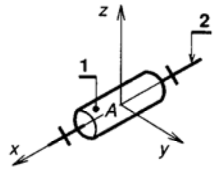
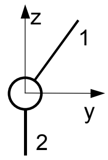
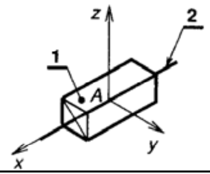
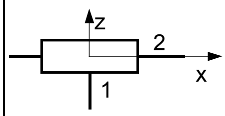
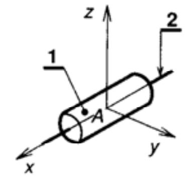
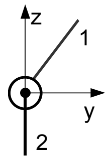
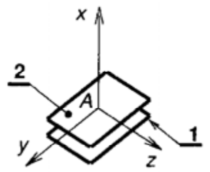
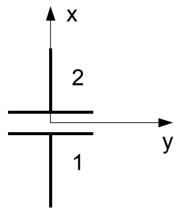
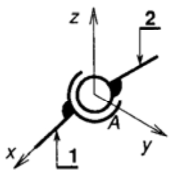
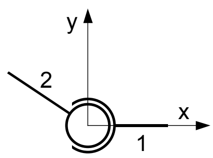
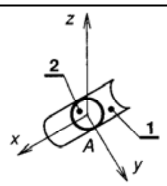
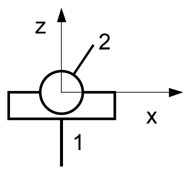
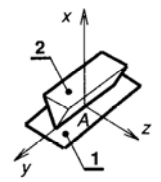
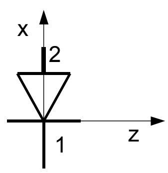
Pour une liaison parfaite particulière, parmi les composantes ci-dessus, certaines sont nulles. Mais il n'y a jamais plus de trois inconnues.

Généralisation :

Un mécanisme dont toutes les pièces utiles admettent un même plan de symétrie pour la géométrie et les efforts est un ***mécanisme plan***.

8. Tableau recapitulatif : Liaisons parfaites

Tableau récapitulatif de quelques torseurs transmissibles par des liaisons parfaites :

Type de liaison et repère local associé R=(A,n ,o ,p)	Schématisation spatiale	Mobilités	Torseur d'action mécanique transmissible	Torseur d'action mécanique Simplifié	Schématisation plan
Pivot d'axe (A,n)		$\begin{matrix} - & R_x \\ - & - \\ - & - \end{matrix}$	$\left\{\begin{matrix} X & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{matrix}\right\}_{A,R}$	plan (A,o p,) ${}_A\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{matrix}\right\}_{\vec{y},\vec{z}}$	
Glissière d'axe (A,<n)		$\begin{matrix} T_x & - \\ - & - \\ - & - \end{matrix}$	$\left\{\begin{matrix} 0 & L \\ Y & M \\ Z & N \end{matrix}\right\}_{A,R}$	Plan (A,n ,p) ${}_A\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & M \\ Z & 0 \end{matrix}\right\}_{\vec{x},\vec{z}}$	
Pivot glissant d'axe (A,<n)		$\begin{matrix} T_x & R_x \\ - & - \\ - & - \end{matrix}$	$\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{matrix}\right\}_{A,R}$	Plan (A,o ,p) ${}_A\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{matrix}\right\}_{\vec{y},\vec{z}}$	
Appui plan de normale (A,<n)		$\begin{matrix} - & R_x \\ T_y & - \\ T_z & - \end{matrix}$	$\left\{\begin{matrix} X & 0 \\ 0 & M \\ 0 & N \end{matrix}\right\}_{A,R}$	Plan (A,n ,o) ${}_A\left\{\begin{matrix} X & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & N \end{matrix}\right\}_{\vec{x},\vec{y}}$	
Sphérique de centre A		$\begin{matrix} - & R_x \\ - & R_y \\ - & R_z \end{matrix}$	$\left\{\begin{matrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{matrix}\right\}_{A,R}$	Plan (A,n ,o) ${}_A\left\{\begin{matrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{\vec{x},\vec{y}}$	
Linéaire circulaire de centre A et d'axe (A,<n)		$\begin{matrix} T_x & R_x \\ - & R_y \\ - & R_z \end{matrix}$	$\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{matrix}\right\}_{A,R}$	Plan (A,n ,p) ${}_A\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z & 0 \end{matrix}\right\}_{\vec{x},\vec{z}}$	
Linéaire rectiligne de normale (A,n) droite de contact (A,o)		$\begin{matrix} - & R_x \\ T_y & R_y \\ T_z & - \end{matrix}$	$\left\{\begin{matrix} X & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & N \end{matrix}\right\}_{A,R}$	Plan (A,n ,p) ${}_A\left\{\begin{matrix} X & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{\vec{x},\vec{z}}$	

Ce tableau n'est pas exhaustif

NB : La liaison hélicoïdale ne permet pas une modélisation plane simple.