Principe Fondamental de la Statique : P.F.S.

1. Enoncé du P.F.S.

1.1 Enoncé qualitatif du P.F.S.

Si un système de solides est en équilibre, alors la somme des actions mécaniques extérieures à ce solide ou ce système est nulle. (ce qui n'est pas nécessairement réciproque …)

Commentaires :

- **Solide ou système de solides** : un système de solides est un ensemble de 1 à plusieurs solides au moins assemblés deux à deux (les pièces d'un mécanisme).
- **Équilibre** : le solide n’est pas en mouvement par rapport à un système **Galiléen** (la terre pour nous, mécaniciens, le soleil pour les Martiens).
- **Actions mécaniques extérieures** : qui dit *extérieures*, dit *intérieures* et dit forcement **frontière** entre les deux milieux : c’est ce que l’on va appeler la frontière d’isolement.

1.2 Bilan des actions mécaniques extérieurs.

Isoler un solide consiste à le séparer du reste du mécanisme afin d’effectuer :

le bilan des actions mécaniques qui lui sont appliquées par l’extérieur

(ce sont celles qui "traversent la frontière)

Méthode utilisant un graphe des liaisons :

- On ajoute au graphe des liaisons, les efforts extérieurs au mécanismes :
  des actionneurs (moteurs, vérins), des récepteurs, des fluides, des solides déformables (ressorts) et des actions mécaniques à distance.
- On entoure le système isolé par une courbe représentant la frontière entre le système et l’extérieur.
- Tous les traits coupés symbolisent une action mécanique extérieure au système.

Remarque importante : on n’isole jamais le bâti. En effet, ce dernier est obligatoirement lié à un autre « bâti » qui n’apparaît pas dans le graphe ; le bilan des efforts extérieurs n'aurait aucun sens.

1.3 Enoncé quantitatif du P.F.S.

La somme des torseurs modélisant les actions mécaniques extérieures au système isolé est égal au torseur nul.

$$\boldsymbol{\Sigma\{\ \text{ext} \rightarrow \text{système}\ \} = \{\ 0\ \}}$$

Mathématiquement, il faut que tous les torseurs soient écrits au même point (n' importe lequel, mais il faut faire preuve de finesse pour choisir le bon).

2. Les différentes manière d'écrire le P.F.S.

2.1 Résolution analytique.

- **Méthode fine.**

Parfois, **il n'est pas nécessaire d'écrire les 6 équations** pour résoudre le problème : là ce sera l'expérience qui parlera :

La modélisation se fait d' abord vectoriellement, et les projections (produits scalaires) se font au dernier moment sur des vecteurs qui ne sont pas nécessairement orthonormés.

Exemple : écriture du principe fondamentale appliqué à la résultantes des actions mécaniques extérieures à (2,3) en projection sur $\vec{u}$ $\Rightarrow$ $\Sigma\, \vec{R}_{\overline{2,3}\to 2} . \vec{u} + \Sigma\, \vec{R}_{\overline{2,3}\to 3} . \vec{u} = 0$

- **Méthode *vulgaire*.**

L'écriture des torseurs se fait en projetant les vecteurs sur une base $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Les torseurs sont donc écrits de la manière suivante, **dès la modélisation** :

Conseil de mise en page verticale pour un solide soumis à 2 actions mécaniques :

Bilan **modélisation** **réduction au même point.**

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad \{3\to 2\} = {}_B\begin{Bmatrix} X_{3\to 2} & L_{B,3\to 2} \\ Y_{3\to 2} & M_{B,3\to 2} \\ Z_{3\to 2} & N_{B,3\to 2} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} X_{3\to 2} & L_{A,3\to 2} \\ Y_{3\to 2} & M_{A,3\to 2} \\ Z_{3\to 2} & N_{A,3\to 2} \end{Bmatrix}$$

$$\text{avec } \vec{M}_{A,3\to 2} = \vec{M}_{B,3\to 2} + \vec{AB} \wedge \vec{R}_{3\to 2}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} \qquad \{4\to 2\} = {}_C\begin{Bmatrix} X_{4\to 2} & L_{C,4\to 2} \\ Y_{4\to 2} & M_{C,4\to 2} \\ Z_{4\to 2} & N_{C,4\to 2} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} X_{4\to 2} & L_{A,4\to 2} \\ Y_{4\to 2} & M_{A,4\to 2} \\ Z_{4\to 2} & N_{A,4\to 2} \end{Bmatrix}$$

Ce qui fait un système de **six équations** à résoudre :

$$= {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

Avantages :

ce type de résolution permet de résoudre tous les problèmes qui ont une solution (elle est utilisée dans les logiciels de calcul). C'est une méthode systématique facile à mettre en œuvre.

Inconvénients :

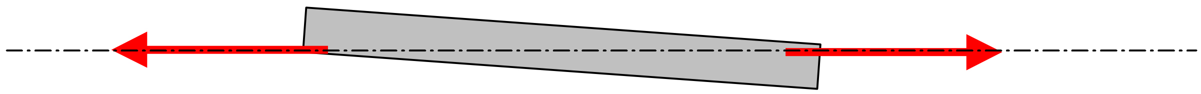
elle est lourde mathématiquement, à cause du système.
Elle impose une seule base orthonormée ce qui n' est pas forcément judicieux.
La modélisation est parfois compliquée à écrire : utilisation de projections, sin, cos, etc….
Il est dangereux de projeter dès la modélisation, sauf pour les problèmes géométriquement particuliers.

2.2 Expression graphiq ue.

- **Deux glisseurs.**

Si le solide est soumis à deux actions mécaniques modélisées par deux glisseurs, alors le P.F.S. s'écrit :

Les deux glisseurs ont même support, sens opposés et même norme.



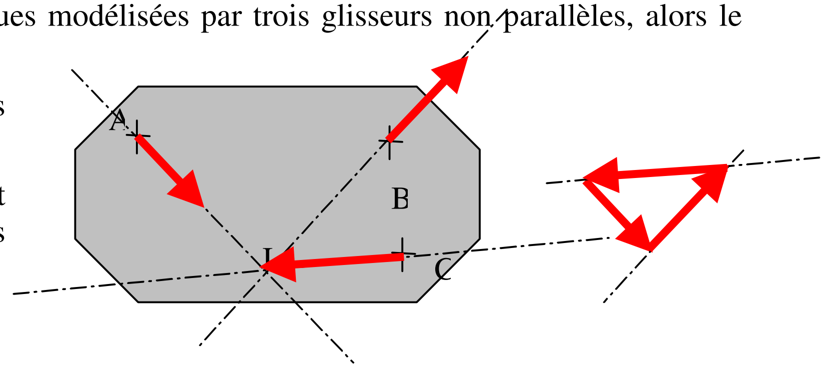
C'est une configuration que l'on retrouve quasi systématiquement pour les bielles (cf ci-dessous).

- **Trois glisseurs.**

⎫ <u>Trois glisseurs non parallèles.</u>

Si le solide est soumis à trois actions mécaniques modélisées par trois glisseurs non parallèles, alors le P.F.S. s'écrit :

1. Les trois glisseurs ont leurs supports concourants (ils se coupent au même point)
2. la somme vectoriel des trois résultantes est nulle (le triangle formé par ces trois vecteurs est fermé).



⎫ <u>Trois glisseurs parallèles.</u>

Si deux des glisseurs sont parallèles, le troisièmes est nécessairement parallèle ; il n' y a donc pas de point de concourrance. Donc, retour à une méthode analytique (résultat simple : *bras de levier*).

2.3 Problème plan.

Les systèmes qui ont fait l'objet d'une modélisation cinématique plane, se prêtent à une résolution plane (utile pour les résolutions graphiques, mais pas seulement).

Dans un problème dit « plan » dans ($\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}$)

- les résultantes sont projetées sur le plan ($\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$) et
- les moments sont projetés sur l'axe $\overrightarrow{z}$.
- Les coordonnées des points sont seulement écris dans le plan ($\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$).

En écriture analytique, une étude plane donne :

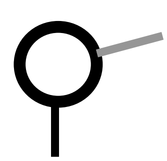
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ \prime \end{pmatrix} \qquad \{3\lozenge\ 2\} = \begin{Bmatrix} X_{3_\lozenge 2} & \prime \\ Y_{3_\lozenge 2} & \prime \\ \prime & N_{B,3_\lozenge 2} \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} X_{3_\lozenge 2} & \prime \\ Y_{3_\lozenge 2} & \prime \\ \prime & N_{A,3_\lozenge 2} \end{Bmatrix}_A$$

Il ne reste plus que **3 équations** scalaires

Attention : les grandeurs noircies, ne sont pas des zéros (même si on fait comme si..). Ce sont des **valeurs inconnues** dont on ne tient pas compte, qui ne se sont pas nécessaires et que l'on ne calcule pas.

- **Exemple essentiel de la liaison pivot ou liaison pivot glissant d'axe perpendiculaire au plan d'étude.**

L'action mécanique transmissible par cette liaison n'est plus qu'un **glisseur appartenant au plan d'étude**. Cette propriété est très importante pour la résolution graphique.



- **Exemple essentiel de bielle en liaison par deux pivot** (à connaître par cœur)

3. Théorème des actions mutuelles.

Si j'appuie sur la pointe d'une punaise, j'ai mal au doigt. Ce qui veut dire qu'elle appuie aussi sur moi...

C'est un théorème : il se démontre à partir du P.F.S. : {1◊ 2} = -{2 ◊ 1}

4. Autres configurations d'écriture du P.F.S.

Le P.F.S. est en fait issu du **Principe Fondamental de la Dynamique** qui dit (voir 2° année) :

La somme des actions mécaniques appliquées à un système de solide **est égale à** *l'accélération* du système de solides

- Lorsque le système est en équilibre, l'accélération du solide est nulle : on écrit le P.F.S.
- Or, il existe d'autres configurations pour lesquelles **l'accélération du solide est nulle** : dans ces cas là, il est possible aussi d'écrire le P.F.S. Ces configurations sont :
    - Mouvement de translation rectiligne uniforme
    - Mouvement de rotation d'axe fixe autour de l'axe principal d'inertie (axe passant par le centre d'inertie)
- Il existe aussi des configuration pour lesquelles **l'accélération du solide est négligeable** devant les actions mécaniques.
    - Si les mouvement sont relativement lent, on peut considérer le système quasi-statique.

5. Quelques règles pour résoudre un problème de statique.

1. Lire et comprendre les données : qu'est-ce qui est connu, qu'est-ce qu'il ne l'est pas ? Hypothèses ?
2. quelles actions mécaniques cherche-t-on ?
3. En déduire le **système à isoler** (ou la suite d'isolements à effectuer) pour faire apparaître, si possible, les actions mécaniques recherchées, et celles que l' on connaît déjà (les données). Si on fait apparaître des inconnues non-recherchées (ce qui est parfois nécessaire cf exos), il faudra les déterminer pour résoudre le problème en effectuant un (ou des) autre(s) isolement(s).

On est souvent amené à procéder à plusieurs isolements

4. Isoler le système et procéder à un recensement précis et soigné des actions mécaniques extérieures au système (un bilan).
5. Modéliser les actions mécaniques en fonctions des hypothèses par des torseurs.
6. Appliquer le P.F.S. et résoudre.

Selon les résultats du bilan et de la modélisation, la résolution se fera *analytiquement* ou *graphiquement*.