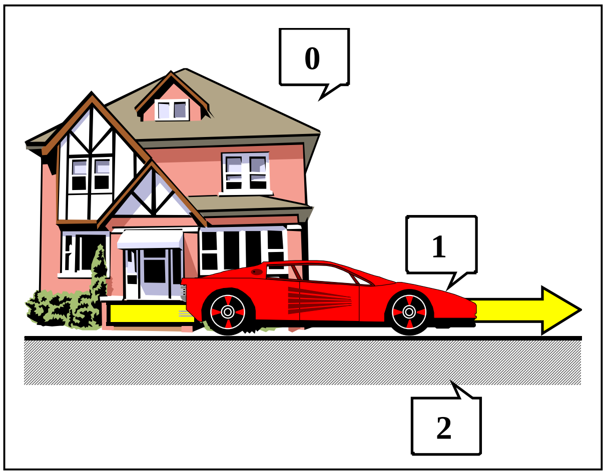
Introduction :

La cinématique est la partie de la mécanique qui étudie le mouvement des corps, indépendamment des efforts qui les produisent. Les grandeurs étudiées sont les mouvements, les déplacements, les trajectoires, les vitesses, les accélérations.

Remarque :
En cinématique, les solides étudiés sont supposés indéformables. Un solide peut être défini comme un ensemble de points dont les distances respectives restent inchangées au cour du temps.

1/ Référentiel.

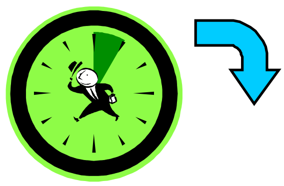
1. Repère et solide de référence :



Le mouvement d'un solide ne peut être défini que par rapport à un autre solide choisi comme référence et est appelé **solide de référence.**

On associera souvent un repère de référence (O ; $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$) au solide de référence, permettant de repérer avec précision la position et le mouvement du solide.

2. Repère de temps.



t_0 t_1 t_2 t_n

L'unité de temps est la seconde (s).

En mécanique le temps est considéré comme absolue et uniforme. Chaque fragment de temps est identique au suivant. On le schématise par une droite orientée de droite à gauche, du passé vers le futur. Si une origine est nécessaire elle sera nommée : $\mathbf{t_0}$ pour t = 0

3. Système de référence.

Le système de référence est tout simplement l'addition d'un solide de référence et d'un repère de temps.

2/ Mouvements absolus et relatifs.

1. Mouvement absolu.

Un mouvement est dit absolu s'il est défini par rapport à un repère ou un référentiel absolu. Un repère absolu est un repère qui est au repos absolu dans l'univers. La terre est en mécanique industrielle un bon repère absolu.

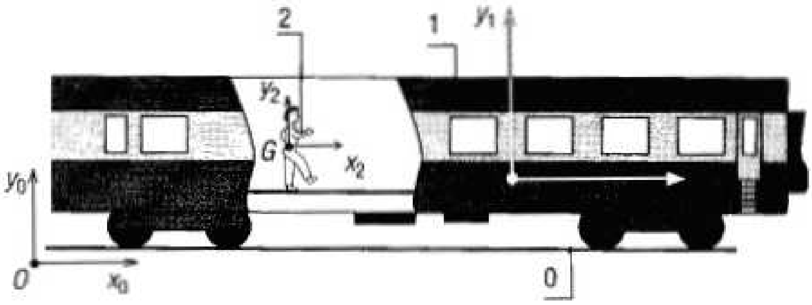
2. Mouvement relatif.

Un mouvement est dit relatif s'il est défini par rapport à un repère ou un référentiel relatif. Un repère relatif est un repère qui bouge dans l'univers.

Exemple :

Prenons le cas d'un train qui se déplace à une vitesse constante de 4 Km/h par rapport au sol. Ici le sol donc la terre est un repère absolu. Maintenant, un voyageur se déplace à une vitesse constante de 4 Km/h par rapport au train et dans le même sens que celui du train. Ici le tain est un repère relatif.

- Le train à une vitesse absolue par rapport à la terre et dans un sens « positif ».
- Le voyageur à une vitesse relative par rapport au train.
- Le voyageur à donc une vitesse absolue par rapport à la terre de 8 Km/h.



3. Ecriture du Mouvement.

Notation :

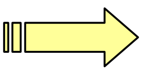
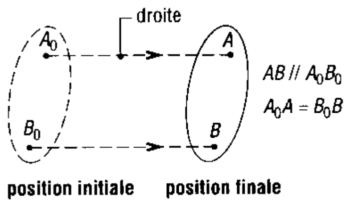
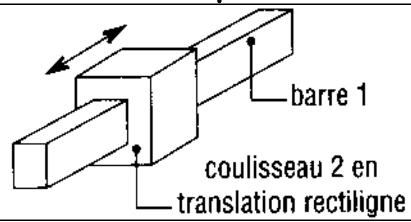
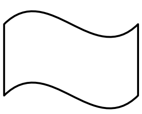
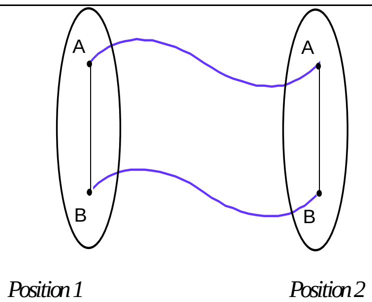
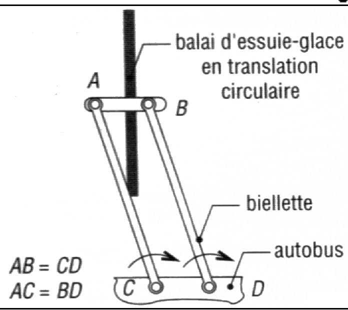
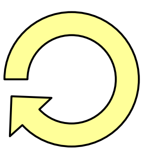
Mouvement du solide 1 par rapport au solide de référence 0.

Mouvement → $\mathbf{M^{vt}}_{\mathbf{1/0}}$ ← Solide de référence

Appartenant au solide | Par rapport

3/ Principaux mouvements plans de solides.

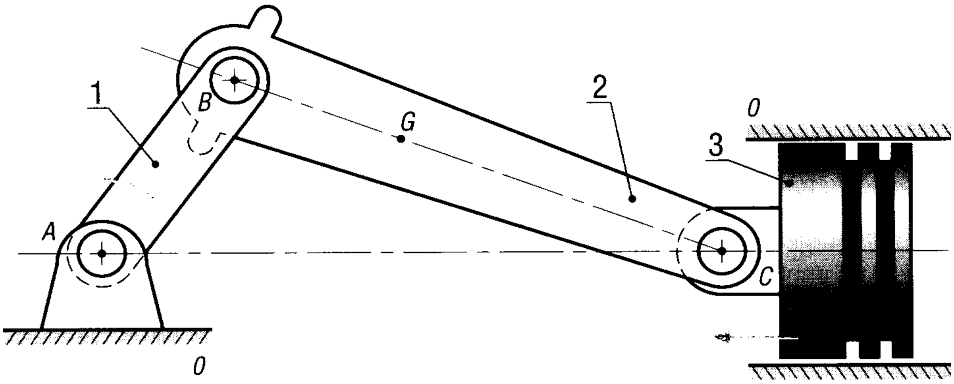
Un solide exécute un mouvement plan lorsque tous les points qui le constitue se déplace dans des plans parallèles entre eux. Par commodité, le plan retenu pour définir le mouvement sera celui qui contient le centre de gravité G et le solide sera assimilé à une fine feuille. Cette schématisation permet de rassembler dans une même catégorie la plupart des mouvements de solides rencontrés en technologie.

Mouvement	Propriétés	Exemple :
Translation rectiligne 		
Translation curviligne 		
Rotation 	Le solide tourne ou est animé d'un mouvement angulaire autour d'un axe fixe perpendiculaire au plan du mouvement. Les points du solide décrivent des cercles ou des portions de cercle centrés sur l'axe de rotation. Toutes les lignes du solide tournent du même angle θ à chaque instant considéré.	

4/ Points coïncidents et trajectoire.

1. Notion de points coïncidents.

Les points coïncidents sont des points qui peuvent appartenir à plusieurs solides en même temps. On peut à tout instant **t** considérer un point comme étant lié à un solide ou à un autre et suivre ces mouvements par rapport à un solide de référence.

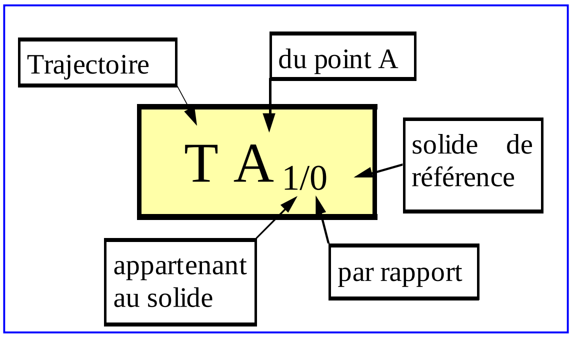


2. Trajectoire d'un point.

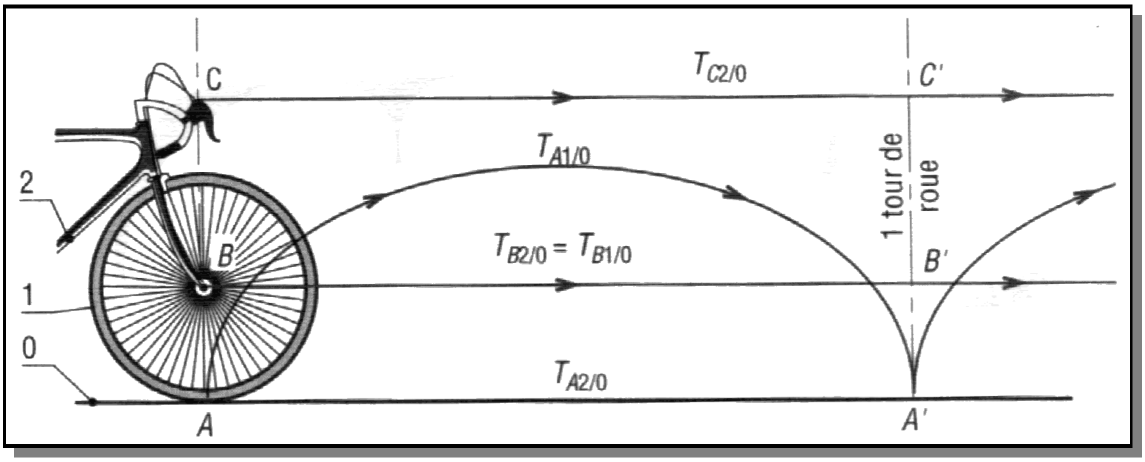
La trajectoire d'un point est la trace de ses positions successives laissées dans l'espace par son déplacement au cour du temps.

Notation :

Trajectoire du point A appartenant au solide 1 par rapport au solide de référence 0.



Exemple : roue avant de bicyclette.



A est le point de contact entre la roue (**1**) et le sol (**0**). **B** est le centre du moyeu entre le cadre et la roue. **C** est un point appartenant à une poignée de frein. Le vélo se déplace en translation rectiligne.

Pour un tour de roue :

- **T C$_{2/0}$** = segment de droite CC'
- **T B$_{2/0}$** = segment de droite BB'
- **T A$_{2/0}$** = segment de droite AA'
- **T A$_{1/2}$** = cercle de centre B et de rayon AB.
- **T A$_{1/0}$** = courbe particulière appelée **cycloïde**.

Vocabulaire :

- Pour un mouvement de **translation rectiligne**, la trajectoire est une **droite**.
- Pour un mouvement **de translation circulaire**, la trajectoire est une **courbe quelconque.**
- Pour un mouvement de **rotation**, la trajectoire est **circulaire**.

5/ Translation des solides.

Lorsqu'un solide est en translation, chaque ligne de celui-ci se déplace parallèlement à sa position initiale au cours du temps.

1. Propriétés.

- **Tous les points du solide en translation ont des trajectoires identiques.**
- **Tous les points du solide ont même vitesse.**
- **Tous les points du solide ont même accélération.**
- **Le mouvement de translation d'un solide est complètement défini par le mouvement de n'importe quel point.**

2. Différents cas.

a) Translation rectiligne :

Les trajectoires des points sont des segments de droites parallèles.

b) Translation circulaire :

Les trajectoires des points sont des courbes géométriques quelconques identiques du plan.

3. Mouvements de translations rectilignes.

On appellera :

$\mathbf{x_0}$ = la distance à l'instant t_0.

$\mathbf{t_0}$ = le temps à l'instant 0.

$\mathbf{x_1}$ = la distance à l'instant t_1.

$\mathbf{t_1}$ = le temps à l'instant t_1.

$\mathbf{\Delta x}$ = la différence de distance entre deux oints.

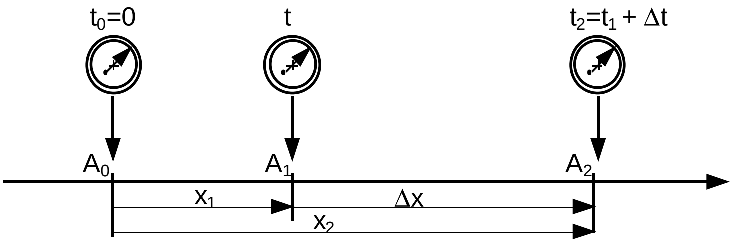
$\mathbf{\Delta t}$ = la différence de temps entre deux instants.

L'unité de distance est le mètre (m).
L'unité de temps est la seconde (s).

4. Vitesse moyenne.

La vitesse moyenne de A entre les instants t et t' est égale à la distance parcourue divisée par le temps mis pour parcourir cette distance. La vitesse moyenne se mesure en mètre par seconde (m/s).

$$\boxed{v_{moy} = \frac{\Delta x}{\Delta t}}$$



Exemple : sur un tronçon d'autoroute parfaitement rectiligne, un véhicule parcourt 5 km en 3 minutes et 20 secondes. Déterminez la vitesse moyenne du véhicule :

Réponse :

5. Accélération.

Les accélérations traduisent les variations de la vitesse (ralentissement, accélération). L'accélération moyenne a_{moy} entre les instants t et t' est égale à la variation de la vitesse Δv divisée par Δt.

6/ Mouvements rectiligne uniforme.

C’est le mouvement le plus simple, sans accélération ($a = 0$) et avec une vitesse constante au cours du temps.

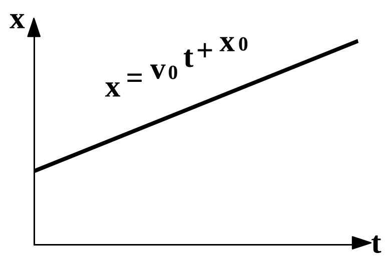
Equations de mouvement :

$$\mathbf{a = 0}$$
$$\mathbf{v = v_0 = constante}$$
$$\mathbf{x = v_0.t + x_0}$$

On appellera :

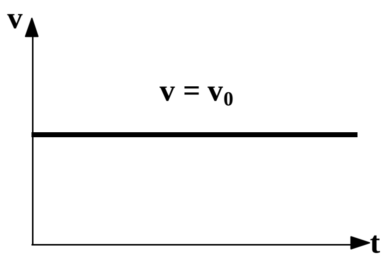
x_0 : déplacement initiale à $t = 0$
v_0 : vitesse du mouvement
x : déplacement à l’instant t.

Allure typique des graphes :



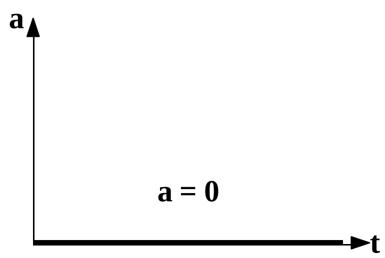
Déplacement

Le déplacement **x** *augmente en fonction du temps* **t**



vitesse

La vitesse **v** *est constante, elle n'augmente pas en fonction du temps* **t.**



Accélération

L'accélération **a** *est nulle et le reste tout au long du temps* **t.**

7/ Mouvements rectiligne uniformément varié.

L'accélération uniforme de la vitesse est l'augmentation, ou la diminution, de cette dernière d'une quantité constante de vitesse à chaque fraction de temps qui se succède. Elle se mesure en mètre par seconde par seconde autrement dit en mètre par seconde au carré (m/s^2).

Equations de mouvement :

$$\mathbf{a = Constante}$$
$$\mathbf{v = a\,t + v_0}$$
$$\mathbf{x = 1/2\,a\,t^2 + v_0\,t + x_0}$$

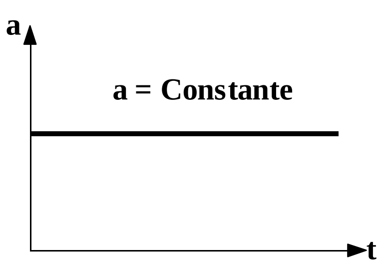
Formule utile :

$$\boxed{\mathbf{v^2 = v_0^{\,2} + 2\,a\,(x - x_0)}}$$

On appellera :

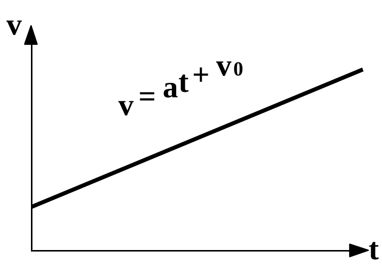
x_0 : déplacement initiale à $t = 0$
v_0 : vitesse du mouvement
x : déplacement à l’instant t.
t : le temps de déplacement.

Allure typique des graphes :



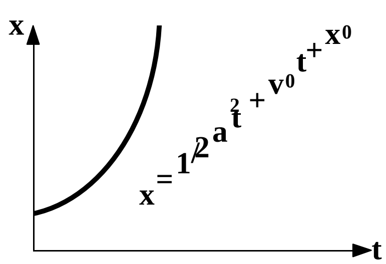
Accélération

L'accélération **a** *est constante, elle n'augmente pas en fonction du temps* **t.**



vitesse

La vitesse **v** *augmente d'une valeur constante* **a** *en fonction du temps* **t.**



Déplacement

Le déplacement **x** *augmente en fonction du temps* **t.** *La courbe est une parabole.*

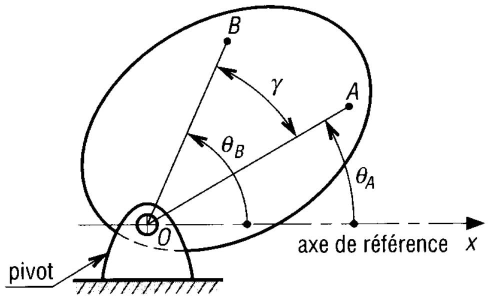
8/ Mouvement de rotation.

1. Propriétés.

- **Tous les points du solide en rotation ont des trajectoires circulaires de même centre.**
- **Tous les points du solide ont la même vitesse angulaire.**
- **Tous les points du solide ont la même accélération angulaire.**

2. Rotation de solides.

La rotation d'un solide est définie par son mouvement angulaire. Pour un solide en rotation plane (rotation d'axe O), il suffit de mesurer l'angle de rotation θ d'une droite quelconque (OA, OB, etc.) appartenant au solide pour repérer la rotation de celui-ci.



Remarques :

1 tour = 2π radian = 360°

Si N est la vitesse de rotation en tours par minute, alors : $\boxed{\omega = \dfrac{\pi . N}{30}}$ (en rad/s)

3. Vitesse angulaire ou vitesse de rotation ω.

Vitesse angulaire moyenne : $\boxed{\omega_{moy} = \dfrac{\theta' - \theta}{t' - t} = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}}$

Exemple : Un changeur d'outils effectue une rotation de 30° en 1,5 seconde pour emmener un foret à la broche de la machine.

Réponse :

Angle en rad/s = (30 x 2π) / 360 = 0,523

$\boxed{\omega_{moy} = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} = \dfrac{0{,}523}{1{,}5} = 0{,}349 \text{ rad / s}}$

4. Accélération

L'accélération est la variation de la vitesse, augmentation ou diminution. De la même manière que pour la vitesse, on aura une accélération moyenne qui s'obtiendra par la différence de vitesse par rapport au temps et une accélération instantanée qui se calculera à un instant t, c'est à dire lorsque la variation de temps sera très proche de zéro.

5. Vitesse linéaire d'un point dans son mouvement de rotation.

La trajectoire de A, T_A, est le cercle de centre O et de rayon OA = R

$\vec{V}_A$ est tangente en A au cercle (T_A) ; elle est également perpendiculaire en A à OA.

L'intensité de $\vec{V}_A$ est égale au produit de OA par la vitesse angulaire ω du solide :

$$\boxed{V_A = \omega . OA = \omega R}$$

9/ Mouvement de rotation uniforme.

C'est le mouvement le plus simple, sans accélération et avec une vitesse constante. L'angle parcouru se calcule en fonction de la vitesse de rotation et du temps de déplacement.

L'accélération angulaire est **nulle** et les équations de mouvement sont :

Equations de mouvement :

$$\alpha = 0$$
$$\omega = \omega_0 = \text{constante}$$
$$\theta = \theta_0 + \omega.t$$

On appellera :

θ_0 = l'angle déjà parcourue à l'instant **0**.
t = le temps de déplacement.
ω_0 = la vitesse initiale du mouvement.
θ = l'angle à l'instant **t**.

Remarque :

Ces équations de mouvement sont les mêmes que celles du mouvement de translation. **x** est remplacé par θ, **v** par ω et **a** par α.

10/ Mouvement de rotation uniforme varié.

L'accélération uniforme de la vitesse est l'augmentation, ou la diminution, de cette dernière d'une quantité constante de vitesse à chaque fraction de temps qui se succède. Elle se mesure en radian par seconde par seconde autrement dit en radian par seconde au carré (rad /s^2).

L'accélération angulaire n'est pas **nulle** et les équations de mouvement sont :

Equations de mouvement :

$$\theta = 1/2\ \alpha\ t^2 + \omega_0\ t + \theta_0$$
$$\omega = \alpha\ t + \omega_0$$
$$\alpha = \text{Constante}$$

On appellera :

θ_0 = l'angle déjà parcourue à l'instant **0**.
t = le temps de déplacement.
ω_0 = la vitesse initiale du mouvement.
θ = l'angle à l'instant **t**.

Formule utile :

$$\omega^2 = \omega_0^{\ 2} + 2\ \alpha\ (\theta - \theta_0)$$

Remarque :

Si $\alpha > 0$, il y a accélération ; si $\alpha < 0$ il y a décélération ou freinage.

Exemple : Un arbre de turbine atteint la vitesse de 4000 tr/mn en 8 minutes. Déterminons les équations de mouvement si l'accélération est constante.

Réponse :

C'est un mouvement de rotation uniformément varié donc les équations de mouvement sont :

$$\text{à } t = 0 \Rightarrow \theta_0 = 0. \quad \omega_0 = 0.$$

$$\theta = 1/2\ \alpha\ t^2 + \omega_0\ t + \theta_0 \quad \Rightarrow \quad \theta = 1/2\ \alpha\ t^2$$
$$\omega = \alpha\ t + \omega_0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \alpha\ t$$
$$\alpha = \text{Constante}$$

à t = 8 mn = 8 x 60 = 480 secondes

$\omega = \alpha\, t \quad \Rightarrow \quad \omega = \alpha\, t \quad \Rightarrow \alpha = \omega / t = 418{,}87 / 480 = \mathbf{0{,}872\ rad / s^2}$

$\theta = 1/2\, \alpha\, t^2 \quad \Rightarrow \quad \theta = 1/2\, \alpha\, t^2$

α **= Constante**

Ce qui nous donne **:** $\omega = 0{,}872\ t$

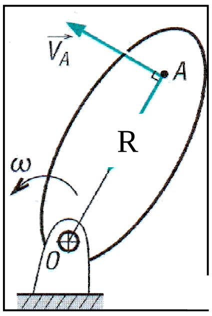
$\theta = 0{,}436\ t^2$

Conclusion :

On peut maintenant déterminer l'angle parcouru θ ou la vitesse ω atteinte par l'arbre à n'importe quel moment du cycle.

Vitesse et accélération d'un point (dans un mouvement de rotation uniformément varié)

➢ Vitesse



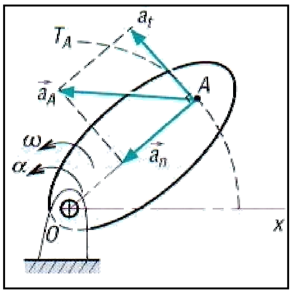
La trajectoire de A, T_A, est le cercle de centre O et de rayon OA = R

$\vec{V}_A$ est tangente en A au cercle (T_A) ; elle est également perpendiculaire en A à OA.

L'intensité de $\vec{V}_A$ est égale au produit de OA par la vitesse angulaire ω du solide.

$$\boxed{V_A = \omega . OA = \omega . R}$$

➢ Accélération



L'accélération $\vec{a}_A$ du point A possède une composante normale $\vec{a}_n$ (dirigée de A vers O) et une composante tangentielle $\vec{a}_t$ (tangente à T_A ou perpendiculaire à OA)

$$\vec{a}_A = \vec{a}_n + \vec{a}_t$$
$$a_t = \alpha . R$$
$$a_n = \omega^2 . R = V_A^{\,2} / R = \omega . V_A$$

Différents cas

vitesse constante	accélération	décélération ou freinage