# Quelle méthode d'intégration dois-je appliquer à ma fonction ?

Cette fiche pratique indique clairement pour chaque type de fonction à intégrer la meilleure technique d'intégration à appliquer. Les différentes "techniques d'intégration" sont principalement :

- l'intégration directe (consultation de la table des primitives)
- l'intégration par parties
- le changement de variable
- la décomposition en éléments simples
- la linéarisation
- la méthode par identification

D'autres "techniques d'intégration" existent et ne sont pas répertoriées ici (combinaison linéaire de deux intégrales, utilisation des nombres complexes, approche numérique d'une intégrale, etc.).
Pour chaque type de fonction à intégrer il y a une technique à utiliser. Les 12 cas les plus fréquents sont rassemblés dans le tableau suivant qui vous oriente vers la technique d'intégration adaptée à la fonction à intégrer. Dis-moi le type de fonction que tu veux intégrer et je te dirai quelle méthode appliquer :

| Cas | Type de fonction à intégrer | Exemple | Technique d'intégration |
|---|---|---|---|
| 1 | Fonction usuelle | $\sin(x), u'/u$, etc. | Intégration directe |
| 2 | Monôme quelconque | $x^n \quad \forall\, n \in R$ | Intégration directe |
| 3 | Élément simple de première espèce | $\frac{1}{(x-a)^n}$ | Intégration directe |
| 4 | Fonction composée | $f \circ g = f(g(x))$ | Changement de variable u=g(x) |
| 5 | Produit de 2 fonctions dont une primitive est connue | $e^x \cdot \sin(x)$ $x^3 \cdot \ln(x)$ | Intégration par parties : $\int u'.v = u.v - \int u.v'$ |
| 6 | Produit d'un polynôme P(x) et d'une exponentielle | $P(x) \cdot e^{a \cdot x+b}$ $deg(P) = deg(Q)$ | Méthode par identification des coefficients : $\int P(x) \cdot e^{a \cdot x+b} = Q(x) \cdot e^{a \cdot x+b}$ |
| 7 | Inverse d'un polynôme de degré 2 (décomposition si $\Delta \geq 0$ : cas 10) | $\frac{1}{3x^2+4x-7}$ | Si $\Delta < 0$ : changement de variable puis reconnaissance de la dérivée d'arctan |
| 8 | Inverse de la racine carrée d'un polynôme de degré 2 | $\frac{1}{\sqrt{3x^2+4x-7}}$ | Changement de variable puis reconnaissance de la dérivée d'arcsin |
| 9 | Élément simple de seconde espèce | $\frac{1}{(a \cdot x^2+b \cdot x+c)^n}$ | Écriture du polynôme sous sa forme canonique puis changement de variable |
| 10 | Fraction rationnelle en $x$ | $\frac{-x^3+x-1}{x^5+x^2+1}$ | Décomposition en éléments simples |
| 11 | Fraction rationnelle en $\sin(x)$ et $\cos(x)$ | $\frac{\sin^4(x)}{\sin(x)+\cos^3(x)}$ | Changement de variable puis décomposition en éléments simples |
| 12 | Produit de $\sin^n(x)$ et $\cos^m(x)$ | $\sin^4(x) \cdot \cos^3(x)$ | Changement de variable ou linéarisation selon la parité des exposants |

Remarques :

- On passe du cas 3 au cas 2 avec un changement de variable u=x-a
- Le cas 9 est une généralité des cas 7 et 8
- Le cas 7 correspond au cas 9 avec n=1 et se traite différemment selon la nature des pôles
- Le cas 8 correspond au cas 9 avec n=1/2
- La décomposition en éléments simples permet de passer du cas 10 aux cas 3 et 9
- Les règles de Bioche indiquent le changement de variable à faire pour passer du cas 11 au cas 10. Il y a 4 cas possibles : u=sin(x) u=cos(x) u=tan(x) et en dernier recourt u=tan(x/2) très efficace
- Pour les cas 7 et 8 l'écriture du polynôme sous sa forme canonique oriente vers le bon changement de variable qui permet d'obtenir la dérivée d'une fonction trigonométrique réciproque
- Dans le cas 7 on tombe sur la dérivée de ( arctan((x+b)/a) ) / a
- Dans le cas 8 on tombe sur la dérivée de arcsin, argsinh ou argcosh