Université Pierre et Marie Curie — Année 2007-2008
LM250 — L2-S3

# Feuille d'exercices 3 : Intégrales définies et généralisées

## 1 Décomposition en éléments simples

**Exercice** 1 :
Décomposer en produits d'irréductibles sur $\mathbb{R}$ puis sur $\mathbb{C}$ :

1. $X^3 - 1$
2. $X^4 + X^2 + 1$
3. $X^8 + X^4 + 1$
4. $X^6 + 1$

**Exercice** 2 :
Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ les fractions rationnelles suivantes :

1. $\dfrac{X^2 + 2X + 5}{X^2 - 3X + 2}$
2. $\dfrac{X^2 + 1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$
3. $\dfrac{1}{X(X-1)^2}$
4. $\dfrac{4}{(X^2-1)^2}$
5. $\dfrac{X^5 + 1}{X^2(X-1)^2}$
6. $\dfrac{1}{X^4 + X^2 + 1}$
7. $\dfrac{4}{(X^2+1)^2}$
8. $\dfrac{3}{(X^3-1)^2}$

**Exercice** 3 :
Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ les fractions rationnelles suivantes :

1. $\dfrac{1}{X(X^2+1)^2}$
2. $\dfrac{X^4 + 1}{X^4 + X^2 + 1}$
3. $\dfrac{3}{(X^3-1)^2}$
4. $\dfrac{X^6}{(X-i)^2(X-1)^3}$

**Exercice** 4 (Concours FSMS - 2006) :
Soient les fractions rationnelles $H_1(s) = \dfrac{-26 - 6s + 2s^2}{s^3 + 2s^2 - 5s - 6}$ et $H_2(s) = \dfrac{-32 - 11s + 4s^2 + s^3}{s^3 + 2s^2 - 5s - 6}$, où $s \in \mathbb{R}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de $H_1(s)$ ?
2. Quels sont les pôles et les zéros de $H_1(s)$ ?
3. Calculez le développement en éléments simples de $H_1(s)$.
4. Calculez le développement en éléments simples de $H_2(s)$.
5. Comment s'exprime $H_2(s)$ en fonction de $H_1(s)$ ?

## 2 Intégrales définies

**Exercice** 5 (sommes de Riemann) :
Montrer que les suites suivantes sont convergentes et donner leur limite :

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}$
2. $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2 + n^2}$
3. $w_n = n \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-n/k}}{k^2}$
4. $z_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{1/n}$
5. $r_n = \dfrac{1}{n} \left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (n+k)\right)^{1/n}$
6. $t_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{1/n}$

**Exercice** 6 (calcul de primitives) :
Calculer les primitives suivantes :

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2+2x+5)}$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$
3. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^6-1}dx$
4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1}$
5. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+1}$
6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$
7. $\displaystyle\int \frac{2\cos x}{3-\cos(2x)}dx$
8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x \sin x}$
9. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x}$
10. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin^2 x + 2\tan^2 x}dx$
11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x + \sin x + 2}$
12. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\cos^3 x}dx$
13. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x(2-x))^{3/2}}$

**Exercice** 7 (calcul d'intégrales) :
Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \arctan x \; dx$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$
3. $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^2)dx$
4. $\displaystyle\int_1^e x^n \ln x \; dx, \quad n \in \mathbb{N}$
5. $\displaystyle\int_1^{e^\pi} \sin(\ln x)dx$
6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx$
7. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$
8. $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin x}{3+\cos^2 x}dx$
9. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x}+2x}$

**Exercice** 8 (changement de variable) :
Calculer les intégrales suivantes en effectuant le changement de variable indiqué :

1. $\displaystyle I = \int_0^{\pi/4} \ln\left(\sqrt{2}\,\frac{\cos(\pi/4-x)}{\cos x}\right)dx, \quad y = \pi/4 - x$
2. $\displaystyle J = \int_{1/a}^{a} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2}dx, \quad y = 1/x$
3. $\displaystyle K = \int_1^2 \frac{\ln(1+x) - \ln x}{x^2}dx, \quad y = 1/x$

**Exercice** 9 (intégration par parties) :
Donner une relation de récurrence permettant de relier $I_{n+2}$ à $I_n$ :

1. $\displaystyle I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \; dx$
2. $\displaystyle I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x \; dx$
3. $\displaystyle I_n = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^n x}$

# 3 Intégrales généralisées

**Exercice** 10 :
Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)\sqrt{x}}$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1}dx$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln x \; e^{-x}dx$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^{3/2}}dx$
5. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}dx$
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\frac{1}{x^2} \; dx$
7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-\sqrt{x}}}{1+x^2}dx$
8. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{(1-x)^3}}dx$
9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x-1}dx$
10. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(\ln x)^2}dx$
11. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x\arctan x} \; dx$
12. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(x+2-\sqrt{x^2+4x+1}\right)dx$

**Exercice** 11 :

Donner une condition nécessaire et suffisante sur les réeles $a$ et $b$ pour que les intégrales suivantes existent :

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^a(x-1)^b}$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^a}{1+x^b}dx$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^a e^{-x}}{1+x^b}dx$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^a)}{x^b}dx$

**Exercice** 12 :

Montrer que les intégrales généralisées suivantes sont convergentes et calculer leur valeur :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-\alpha x}dx, \quad \alpha > 0$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$, poser $y=\sqrt{x}$
3. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x \ln(\sin x)dx$, poser $y = \cos x$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}dx$, poser $y=\sqrt{x}$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$ (on pourra remarquer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}dx$)
6. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\cos x}$, poser $t = \tan(x/2)$
7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(e^x+1)(e^{-x}+1)}$, poser $y = e^x$
8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx$, IPP
9. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}dx$, IPP

**Exercice** 13 :

On souhaite calculer l'intégrale généralisée

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^{3/2}}dx \ .$$

1. Montrer que cette intégrale est convergente.
2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt{2}\ x+1}$ est convergente et calculer sa valeur.
3. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle $\displaystyle\frac{1}{x^4+1}$ et montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.
4. Montrer que $\displaystyle I = 2\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x^2+1)}$ et en déduire la valeur de $I$.

**Exercice** 14 :

Soit $F : [0,1[ \to \mathbb{R}, x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

1. Montrer que
$$\forall x \in [0,1[ \ \forall t \in [x^2, x] \quad -\frac{x^2}{t\ln t} \leq -\frac{1}{\ln t} \leq -\frac{x}{t \ln t}$$
et en déduire $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} F(x)$.
2. Calculer $F'(x)$ et en déduire la valeur de l'intégrale
$$I = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}dt \ .$$

**Exercice** 15 :

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\displaystyle I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^{n+1}}$.

1. Justifier l'existence de $I_n$ et calculer $I_0$.
2. En calculant $I_{n+1} - I_n$ par une intégration par parties, établir une relation entre $I_{n+1}$ et $I_n$.
3. On note $u_n = \sqrt[3]{n} I_n$ et $v_n = \ln u_{n+1} - \ln u_n$.
Montrer, à l'aide d'un développement limité, que la série de terme général $v_n$ convege.
4. En déduire que la suite $(\ln u_n)$ converge, puis qu'il existe $A>0$ tel que $I_n \sim \dfrac{A}{\sqrt[3]{n}}$.