Intégration par parties - Changements de variable

Exercice 1 - Changements de variables - Niveau 1 - *L1/Math Sup* - ⋆

1. La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est une bijection de classe C^1 de $[1,4]$ sur $[1,2]$. On peut donc poser $u = \sqrt{t}$. Lorsque $t = 1$, $u = 1$ et lorsque $t = 4$, u vaut 2. De plus, on a
$$\frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}} = \frac{1-u}{u}$$
et
$$u = \sqrt{t} \implies t = u^2 \implies dt = 2udu.$$
On en déduit que
$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{t}dt &= \int_1^2 \frac{1-u}{u}2udu\\ &= \int_1^2 (2-2u)du\\ &= \left[2u-u^2\right]_1^2\\ &= -1\end{aligned}$$

2. La fonction $x \mapsto e^x$ réalise une bijection de $[1,2]$ sur $[e,e^2]$. Effectuons le changement de variables $u = e^x$ dans l'intégrale, de sorte que $du = e^x dx$. Il vient
$$\int_1^2 \frac{e^x}{1+e^x}dx = \int_e^{e^2} \frac{du}{1+u} = \left[\ln|1+u|\right]_e^{e^2} = \ln\left(\frac{1+e^2}{1+e}\right).$$

Exercice 2 - Changements de variables - Niveau 2 - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

1. La fonction $x \mapsto \ln x$ réalise une bijection de $[1,e]$ sur $[0,1]$. On pose donc $u = \ln x$ de sorte que $du = \frac{dx}{x}$. De plus, lorsque x vaut 1, u vaut 0 et lorsque x vaut e, u vaut 1. On trouve donc
$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x}dx &= \int_0^1 u^n du\\ &= \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

2. La fonction à intégrer est définie et continue sur $]0,+\infty[$. On se limite donc à calculer l'intégrale recherchée pour $x > 0$. La fonction $t \mapsto \sqrt{e^t-1}$ est une bijection de $[1,x]$ sur $[\sqrt{e-1}, \sqrt{e^x-1}]$. Posant $u = \sqrt{e^t-1}$, on a
$$du = \frac{e^t}{2\sqrt{e^t-1}}dt$$
d'où
$$F(x) = 2\int_{\sqrt{e-1}}^{\sqrt{e^x-1}} \frac{du}{u^2+4} = \arctan\left(\frac{\sqrt{e^x-1}}{2}\right) - \arctan\left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right).$$

Exercice 3 - Changements de variables - Recherche de primitives - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

1. La fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ est définie et continue sur $]0,+\infty[$, intervalle sur lequel on cherche à calculer une primitive. Pour cela, on fait le changement de variables $u = \ln x$, de sorte que $du = \frac{dx}{x}$ et on trouve

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln x}{x} dx &= \int u du \\ &= \frac{1}{2}u^2 + C \\ &= \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C. \end{aligned}$$

2. La fonction $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$ est définie et continue sur $]0,+\infty[$, intervalle sur lequel on cherche à calculer une primitive. Pour cela, on effectue le changement de variables $u = \sqrt{x}$, de sorte que $x = u^2$ ou encore $dx = 2udu$. On trouve alors

$$\begin{aligned} \int \cos(\sqrt{x})dx &= 2\int u\cos(u)du \\ &= 2[u\sin u] - 2\int \sin(u)du \\ &= 2u\sin u + 2\cos u + C \\ &= 2\sqrt{x}\sin(\sqrt{x}) + 2\cos(\sqrt{x}) + C \end{aligned}$$

(on a aussi effectué une intégration par parties).

Exercice 4 - Intégration par parties - Niveau 1 - *L1/Math Sup* - ⋆

1. La fonction $x \mapsto \arctan x$ étant continue sur $\mathbb{R}$, elle admet une primitive sur cet intervalle. On intègre par parties en posant :

$$\begin{array}{rclcrcl} u(x) &=& \arctan x & \quad & u'(x) &=& \frac{1}{x^2+1} \\ v'(x) &=& 1 & & v(x) &=& x \end{array}$$

de sorte que

$$\int \arctan t dt = x\arctan x - \int \frac{x}{x^2+1}.$$

La primitive que l'on doit encore rechercher est de la forme g'/g, et donc

$$\int \arctan t dt = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1).$$

2. La fonction $x \mapsto (\ln x)^2$ étant continue sur $]0,+\infty[$, elle admet des primitives sur cet intervalle. On se restreint à cet intervalle et on intègre par parties en posant :

$$\begin{array}{rclcrcl} u(x) &=& (\ln x)^2 & \quad & u'(x) &=& 2\frac{\ln x}{x} \\ v'(x) &=& 1 & & v(x) &=& x \end{array}$$

de sorte que
$$\int (\ln t)^2 dt = x(\ln x)^2 - 2\int \ln t dt.$$
Une primitive de $x \mapsto \ln x$ étant $x \mapsto x\ln x - x$ (résultat qui se retrouve en intégrant par parties), on trouve finalement qu'une primitive de $x \mapsto (\ln x)^2$ est
$$x \mapsto x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x.$$

3. On va intégrer par parties deux fois. On travaille sur l'intervalle $]0,+\infty[$, là où la fonction est bien définie et continue. On pose alors :
$$\begin{array}{rclcrcl} u(x) & = & \sin(\ln x) & & u'(x) & = & \frac{1}{x}\cos(\ln x) \\ v'(x) & = & 1 & & v(x) & = & x \end{array}$$
de sorte que
$$\int \sin(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x).$$
On intègre une deuxième fois par parties en posant
$$\begin{array}{rclcrcl} u_1(x) & = & \cos(\ln x) & & u_1'(x) & = & -\frac{1}{x}\sin(\ln x) \\ v_1'(x) & = & 1 & & v_1(x) & = & x \end{array}$$
de sorte que
$$\int \cos(\ln x)dx = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x).$$
En mettant tout cela ensemble, on trouve
$$\int \sin(\ln x)dx = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)$$
soit
$$\int \sin(\ln x) = \frac{x}{2}\big(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\big).$$

Exercice 5 - Intégration par parties - Niveau 2 - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

1. On intègre par parties, en posant $u'(x) = x$ et $v(x) = (\arctan x)^2$. On a $v'(x) = \frac{2\arctan(x)}{x^2+1}$, et ceci nous incite à considérer comme primitive de u' la fonction $u(x) = \frac{1}{2}(x^2+1)$, ce qui va simplifier les calculs. On obtient alors
$$I = \frac{1}{2}\big[(x^2+1)(\arctan x)^2\big]_0^1 - \int_0^1 \arctan x.$$
On calcule la dernière intégrale en réalisant à nouveau une intégration par parties, et on trouve :
$$\begin{array}{rcl} I & = & \frac{\pi^2}{16} - \big[x\arctan x\big]_0^1 + \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx \\ & = & \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\big[\ln(x^2+1)\big]_0^1 \\ & = & \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2. \end{array}$$

2. La fonction $f : x \mapsto \frac{x\ln x}{(x^2+1)^2}$ est continue sur $]0,1]$, et elle tend vers 0 en 0. On peut donc la prolonger par continuité à $[0,1]$ en posant $f(0)=0$, ce qui donne un sens à J.
   Pour calculer cette intégrale, on va intégrer par parties entre $a>0$ et 1, pour ne pas être gêné par les problèmes en 0. On pose donc $J(a)=\int_a^1 \frac{x\ln x}{(x^2+1)^2}$, puis :
$$\begin{array}{rr} u(x)=(\ln x) & v'(x)=\frac{x}{(x^2+1)^2} \\ u'(x)=\frac{1}{x} & v(x)=-\frac{1}{2(x^2+1)} \end{array}$$
   ce qui donne
$$J(a)=\left[-\frac{\ln x}{2(x^2+1)}\right]_a^1+\frac{1}{2}\int_a^1\frac{dx}{x(x^2+1)}.$$
   De plus,
$$\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}$$
   de sorte que
$$\int_a^1\frac{dx}{x(x^2+1)}=\left[\ln x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_a^1=-\frac{1}{2}\ln 2-\ln(a)+\frac{1}{2}\ln(1+a^2).$$
   On obtient donc que
$$J(a)=\frac{\ln a}{2(a^2+1)}-\frac{\ln 2}{4}-\frac{\ln a}{2}+\frac{1}{4}\ln(1+a^2).$$
   Reste à faire tendre a vers 0. Pour cela, on factorise par $\ln a$, et on trouve
$$J(a)=\frac{-a^2\ln(a)}{2(a^2+1)}-\frac{\ln 2}{4}+\frac{1}{4}\ln(1+a^2).$$
   Comme $a^2\ln(a)$ tend vers 0 lorsque a tend vers 0, de même que $\ln(1+a^2)$, on conclut finalement que
$$J=-\frac{\ln 2}{4}.$$

Exercice 6 - Une suite d'intégrales - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

Pour $(n,p)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}$, l'application $x\mapsto x^n(\ln x)^p$ est définie et continue sur $]0,1]$. De plus, les théorèmes de comparaison usuels entraînent que cette fonction se prolonge par continuité en 0 (remarquons l'importance de $n>0$). Ceci justifie l'existence de $I_{n,p}$. Pour calculer $I_{n,p}$, nous allons réaliser une intégration par parties. On la réalise entre $a>0$ et 1, pour prendre garde au fait que la fonction logarithme n'est pas définie en 0. On remarque aussi que $I_{n,0}=\frac{1}{n+1}$, et donc il suffit de traiter le cas $p>0$.
On pose donc
$$I_{n,p}(a)=\int_0^a x^n(\ln x)^p dx$$
puis
$$\begin{array}{rr} u(x)=(\ln x)^p & v'(x)=x^n \\ u'(x)=\frac{p(\ln x)^{p-1}}{x} & v(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}. \end{array}$$

On trouve alors,

$$I_{n,p}(a) = \frac{1}{n+1}\Big[x^{n+1}(\ln x)^p\Big]_a^1 - \frac{p}{n+1}\int_a^1 x^n(\ln x)^{p-1}dx = \frac{-a^{n+1}}{n+1} - \frac{p}{n+1}I_{n,p-1}.$$

On passe à la limite en faisant tendre a vers 0, et on trouve :

$$I_{n,p} = -\frac{p}{n+1}I_{n,p-1}.$$

On trouve alors

$$I_{n,p} = \frac{(-p)\times(-(p-1))\times\dots\times(-1)}{(n+1)\times(n+1)\times\dots\times(n+1)}I_{n,0} = \frac{(-1)^p p!}{(n+1)^p}\times\frac{1}{n+1} = \frac{(-1)^p p!}{(n+1)^{p+1}}.$$

Exercice 7 - Une autre suite d'intégrales - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

On pose, pour $(\alpha,\beta,n,m)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{N}^2$,

$$I_{m,n} = \int_\alpha^\beta (t-\alpha)^m(t-\beta)^n dt.$$

On intègre par parties pour obtenir une relation entre $I_{m,n}$ et $I_{m-1,n+1}$, et on trouve

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= \left[(t-\alpha)^m\frac{(t-\beta)^{n+1}}{n+1}\right]_\alpha^\beta - \frac{m}{n+1}\int_\alpha^\beta (t-\alpha)^{m-1}(t-\beta)^{n+1}dt \\ &= -\frac{m}{n+1}I_{m-1,n+1}. \end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $p\in\mathbb{N}$, on a

$$I_{0,p} = \int_\alpha^\beta (t-\alpha)^p dt = -\frac{(\alpha-\beta)^{p+1}}{p+1}.$$

Une récurrence immédiate donne alors

$$I_{m,n} = (-1)^{m+1}\frac{m(m-1)\dots 1}{(n+1)(n+2)\dots(n+m)}\frac{(\alpha-\beta)^{m+n+1}}{m+n+1}.$$

En particulier, l'intégrale recherché vaut $I_{n,n}$, c'est-à-dire

$$I_{n,n} = (-1)^{n+1}\frac{n!}{(n+1)\dots(2n)}\frac{(\alpha-\beta)^{2n+1}}{2n+1} = (-1)^{n+1}\frac{(\alpha-\beta)^{2n+1}}{(2n+1)\binom{2n}{n}}.$$

Fractions rationnelles

Exercice 8 - Fractions rationnelles - Niveau 1 - *L1/Math Sup* - ⋆

1. On commence par faire apparaître au numérateur la dérivée du dénominateur.
$$\frac{3x+2}{x^2+x+1}=\frac{3}{2}\times\frac{2x+1}{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{x^2+x+1}.$$
On intègre alors. Pour la première partie, c'est facile, car :
$$\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}=\ln|x^2+x+1|.$$
Pour la seconde, on se ramène à écrire le dénominateur sous la forme $X^2+\omega^2$, ce qui nécessite en plus un changement de variables. Ici, on a $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$ soit, avec le changement de variables $u=x+1/2$,
$$\int\frac{dx}{x^2+x+1}=\int\frac{du}{u^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$$
Finalement, une primitive de la fonction recherchée est
$$x\mapsto\frac{3}{2}\ln|x^2+x+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$$
2. C'est plus facile, car le numérateur est une constante. On écrit simplement que $x^2+4x+5=(x+2)^2+1$ et la méthode précédente donne
$$\int\frac{dx}{x^2+4x+5}=\arctan(x+2).$$
3. On commence par effectuer la division euclidienne du numérateur par le dénominateur. On trouve que
$$x^3+2x=(x-1)(x^2+x+1)+2x+1$$
d'où
$$\frac{x^3+2x}{x^2+x+1}=x-1+\frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$
Une primitive est donc la fonction
$$x\mapsto\frac{x^2}{2}-x+\ln|x^2+x+1|.$$
4. On sait que la fraction rationnelle peut s'écrire
$$\frac{2x-1}{(x+1)^2}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{(x+1)^2}.$$
Par identification (par exemple...), on trouve que $a=2$ et $b=-3$. Une primitive de la fonction est donc
$$x\mapsto 2\ln|x+1|+\frac{3}{x+1}.$$

Exercice 9 - Fractions rationnelles - Niveau 2 - *L1/Math Sup* - $\star$

1. Le dénominateur se factorise en $(x-1)(x^2+x+1)$. On cherche alors à écrire
$$\frac{1}{x^3-1}=\frac{a}{x-1}+\frac{bx+c}{x^2+x+1}.$$
Par identification (par exemple...) on trouve $a=1/3$, $b=-1/3$ et $c=-2/3$, soit
$$\frac{1}{x^3-1}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{x-1}-\frac{1}{3}\times\frac{x+2}{x^2+x+1}.$$
On cherche alors à faire apparaître la dérivée de x^2+x+1 pour faciliter l'intégration, et on trouve
$$\frac{1}{x^3-1}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{x-1}-\frac{1}{6}\times\frac{2x+1}{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{x^2+x+1}.$$
Pour intégrer le dernier terme, on écrit
$$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$
ce qui donne finalement qu'une primitive de la fonction est
$$x\mapsto\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln|x^2+x+1|-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$$
2. C'est assez difficile si on ne pense pas à faire un changement de variables. On peut en effet poser $u=x^2$, et
$$\int\frac{x}{(x^2-4)^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{(u-4)^2}du=-\frac{1}{2(u-4)}=-\frac{1}{2(x^2-4)}.$$

Exercice 10 - Grande puissance - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

Une intégration par parties donne
$$I_n=\left[\frac{x}{(x^2+1)^n}\right]_0^1+2n\int_0^1\frac{x}{(x^2+1)^{n+1}}dx=\frac{1}{2^n}+2n\int_0^1\frac{x}{(x^2+1)^{n+1}}dx.$$
Or,
$$\int_0^1\frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}=\int_0^1\frac{x^2+1}{(x^2+1)^{n+1}}-\int_0^1\frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}dx=I_n-I_{n+1}.$$
Regroupant les termes, on trouve
$$2nI_{n+1}=(2n-1)I_n+\frac{1}{2^n}\iff I_{n+1}=\frac{2n-1}{2n}I_n+\frac{1}{n2^{n+1}}.$$
Sachant que $I_1=\frac{\pi}{4}$, on trouve
$$I_2=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\text{ et }I_3=\frac{3\pi}{32}+\frac{1}{4}.$$

Avec la fonction exponentielle

Exercice 11 - **Fonction exponentielle - Niveau 1** - *Math Sup/L1* - ⋆

1. La fonction $x\mapsto \frac{1}{\cosh x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (le dénominateur ne s'annule pas). Une primitive est par exemple la fonction F définie par
$$x\mapsto \int_0^x \frac{1}{\cosh t}dt=\int_0^x \frac{2e^t}{1+e^t}dt.$$
On calcule cette intégrale à l'aide du changement de variables $u=e^t$ (la fonction $t\mapsto e^t$ est une bijection de classe C^1 de $[0,x]$ sur $[1,e^x]$, de bijection réciproque $u\mapsto \ln u$). On en déduit que
$$F(x)=\int_1^{e^x}\frac{2du}{1+u^2}=\left[2\arctan(u)\right]_1^{e^x}=2\arctan(e^x)-\frac{\pi}{2}.$$
2. On réalise là-aussi le changement de variables $u=e^x$, $du=e^xdx$ soit $dx=du/u$ et on trouve :
$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+e^x}dx &= \int \frac{1}{u(1+u)}du\\ &= \int\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{1+u}\right)du\\ &= \ln\left(\frac{u}{1+u}\right)+C\\ &= \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)+C.\end{aligned}$$
3. On peut intégrer par parties, ou rechercher une primitive de la même forme, c'est-à-dire une fonction $F:x\mapsto e^x(ax^3+bx^2+cx+d)$. On a alors
$$F'(x)=e^x\big(ax^3+(3a+b)x^2+(2b+c)x+(c+d)\big).$$
Par identification, on trouve que F est une primitive de $x\mapsto e^x(2x^3+3x^2-x+1)$ lorsque $a=2$, $3a+b=-3$, $2b+c=5$ et $c+d=1$, soit $a=2$, $b=-3$, $c=5$ et $d=-4$. Les primitives sont donc les fonctions
$$x\mapsto e^x(2x^3-3x^2+5x-4)+C.$$

Exercice 12 - **Fonction exponentielle - Niveau 2** - *Math Sup/L1* - ⋆

1. On pose $u=e^x$, de sorte que
$$\begin{aligned}\int\frac{\cosh x-1}{\cosh x+1}e^xdx &= \int\frac{u^2-2u+1}{u^2+2u+1}du\\ &= \int du-\int\frac{4u}{(u+1)^2}du\\ &= u-\int\frac{4}{u+1}+\int\frac{4}{(u+1)^2}\\ &= u-4\ln(1+u)-\frac{4}{1+u}+C\\ &= e^x-4\ln(1+e^x)-\frac{4}{1+e^x}+C.\end{aligned}$$

2. Le changement de variables le plus malin ici est $u=\sinh x$, de sorte que
$$\frac{dx}{\cosh x}=\frac{\cosh x dx}{\cosh^2 x}=\frac{du}{1+u^2}.$$
On en déduit :
$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\cosh x(1+\sinh x)}dx &= \int\frac{du}{(1+u^2)(1+u)}\\ &= \int\frac{-u/2+1/2}{u^2+1}du+\int\frac{1/2}{1+u}du\\ &= \frac{-1}{4}\int\frac{2u}{u^2+1}du+\int\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^2+1}+\frac{1}{2}\ln|1+u|\\ &= \frac{-1}{4}\ln(u^2+1)+\frac{1}{2}\arctan(u)+\frac{1}{2}\ln|1+u|+C\\ &= \frac{-1}{2}\ln(\cosh x)+\frac{1}{2}\arctan(\sinh x)+\frac{1}{2}\ln|1+\sinh x|+C.\end{aligned}$$

Exercice 13 - Exponentielle et trigonométrique - *Math Sup/L1* - $\star$

1. I est égal à $\Re e(J)$ avec $J=\int_0^\pi x^2e^{(1+i)x}$ (on a posé $\cos x=\Re e(e^{ix})$). En intégrant par parties, on trouve
$$\begin{aligned}J &= \left[\frac{x^2e^{(1+i)x}}{1+i}\right]_0^\pi-\frac{2}{1+i}\int_0^\pi xe^{(1+i)x}dx\\ &= -\frac{\pi^2e^\pi}{1+i}-\frac{2}{1+i}\int_0^\pi xe^{(1+i)x}dx.\end{aligned}$$
On fait une deuxième intégration par parties pour calculer cette dernière intégrale, et on trouve
$$\begin{aligned}\int_0^\pi xe^{(1+i)x}dx &= \left[\frac{xe^{(1+i)x}}{1+i}\right]_0^\pi-\frac{1}{1+i}\int_0^\pi e^{(1+i)x}dx\\ &= -\frac{\pi e^\pi}{1+i}-\frac{1}{(1+i)^2}\left[e^{(1+i)x}\right]_0^\pi\\ &= -\frac{\pi e^\pi}{1+i}+\frac{i}{2}(1-e^\pi).\end{aligned}$$
Regroupant tous les termes, et multipliant par la quantité conjuguée au dénominateur, on trouve :
$$J=-\pi^2e^\pi\frac{1-i}{2}-i\pi e^\pi-\frac{1+i}{2}(1-e^\pi),$$
soit
$$I=-\frac{1}{2}+\frac{1-\pi^2}{2}e^\pi.$$

2. On commence par linéariser $\sin^2 x$ et on trouve
$$J=\int_0^{2\pi}e^{-x}\left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)dx=\frac{1-e^{-2\pi}}{2}-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}e^{-x}\cos(2x).$$

On calcule alors la dernière intégrale en utilisant les complexes. On trouve

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} e^{-x}\cos(2x)dx &= \Re e\left(\int_0^{2\pi} e^{(2i-1)x}dx\right)\\ &= \Re e\left(\left[\frac{1}{2i-1}e^{(2i-1)x}\right]_0^{2\pi}\right)\\ &= \Re e\left(\frac{1}{5}(2i+1)(1-e^{-2\pi})\right)\\ &= \frac{1}{5}(1-e^{-2\pi}).\end{aligned}$$

Finalement, on trouve

$$J=\frac{2}{5}(1-e^{-2\pi}).$$

Fonctions trigonométriques

Exercice 14 - Puissances et produits - *L1/Math Sup* - ⋆

1. On a

$$\begin{aligned}\sin^5 x &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^5\\ &= \frac{1}{2^5 i}\left(e^{5ix}-e^{-5ix}-5e^{3ix}+5e^{-3ix}+10e^{ix}-10e^{-ix}\right)\\ &= \frac{\sin(5x)}{16}-\frac{5\sin(3x)}{16}+\frac{5\sin(x)}{8}.\end{aligned}$$

Une primitive de la fonction recherchée est donc la fonction

$$x\mapsto \frac{-\cos(5x)}{80}+\frac{5\cos(3x)}{48}-\frac{5\cos(x)}{8}.$$

2. On écrit, pour éviter le calcul d'un produit, $\cos^4 x\sin^2 x=\cos^4 x-\cos^6 x$. Or,

$$\begin{aligned}\cos^4 x &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4\\ &= \frac{1}{2^4}\left(e^{i4x}+e^{-i4x}+4e^{2ix}+4e^{-2ix}+6\right)\\ &= \frac{1}{2^4}\left(2\cos(4x)+8\cos(2x)+6\right).\end{aligned}$$

De même, on trouve

$$\cos^6 x=\frac{1}{2^6}(2\cos(6x)+12\cos(4x)+30\cos(2x)+20).$$

On a donc

$$\cos^4 x-\cos^6 x=-\frac{1}{32}\cos(6x)-\frac{1}{16}\cos(4x)+\frac{1}{32}\cos(2x)+\frac{1}{16}.$$

Une primitive de la fonction étudiée est donc la fonction

$$x \mapsto \frac{-1}{192}\sin(6x) - \frac{1}{64}\sin(4x) + \frac{1}{64}\sin(2x) + \frac{x}{16}.$$

3. On commence par linéariser $\cos^3 x$ en $\big(\cos(3x)+3\cos(x)\big)/4$. Avec la formule

$$\cos p \cos q = \frac{1}{2}\big(\cos(p+q)+\cos(p-q)\big)$$

on trouve finalement

$$\begin{aligned}\int \cos(3x)\cos^3 x &= \frac{1}{8}\int \big(1+\cos(6x)+3\cos(4x)+3\cos(2x)\big)dx\\ &= \frac{x}{8}+\frac{\sin(6x)}{48}+\frac{3\sin(4x)}{32}+\frac{3\sin(2x)}{16}+C.\end{aligned}$$

Exercice 15 - Intégrale trigonométrique - Niveau 1 - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

1. On pose $u=\cos t$, de sorte que $dt = -\cos u du$. Il vient $\sin^3 dt = (\sin^2 t)\sin t dt = -(1-u^2)du$. De plus, pour $t=0$, $u=1$ et pour $t=\pi/4$, $u=\sqrt{2}/2$. L'intégrale est donc égale à

$$I = \int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{1-u^2}{1+u^2}du = -\int_{\sqrt{2}/2}^1 du + \int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{2}{u^2+1}du$$

soit

$$I = -1+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{2}-2\arctan(\sqrt{2}/2).$$

2. Là aussi, le meilleur changement de variables est $u=\cos x$, de sorte que $du = -\sin x dx$. Pour le faire apparaitre dans l'intégrale, on écrit :

$$\begin{aligned}\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{dx}{\sin x} &= \int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx\\ &= \int_{1/2}^0 \frac{-du}{1-u^2}\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{1/2}\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right)du\\ &= \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\right]_0^{1/2}\\ &= \frac{1}{2}\ln 3.\end{aligned}$$

3. C'est encore le même changement de variables qui est le meilleur !

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/3}(1+\cos(x))\tan(x) &= \int_{1/2}^1 \frac{u}{1+u}du\\ &= [u+\ln u]_{1/2}^1\\ &= \frac{1}{2}+\ln 2.\end{aligned}$$

Exercice 16 - Intégrale trigonométrique - Niveau 2 - *Math Sup/L1* - ⋆⋆

1. On pose
$$w(x)=\frac{\tan x}{\sqrt{2}\cos x+2\sin^2 x}dx$$
et on remarque que $w(-x)=w(x)$. Ceci nous conduit, par les règles de Bioche, au changement de variables $t=\cos x$. Il vient $dt=-\sin x dx$ et donc
$$I=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1\frac{-dt}{t(\sqrt{2}t+2-2t^2)}.$$
On décompose la fraction rationnelle en éléments simples en remarquant que
$$\frac{-1}{t(\sqrt{2}t+2-2t^2)}=\frac{1}{t(t-\sqrt{2})(2t+\sqrt{2})}=\frac{-1}{2t}+\frac{1}{6(t-\sqrt{2})}+\frac{2}{3(2t+\sqrt{2})}.$$
On en déduit
$$I=\left[-\frac{1}{2}\ln t+\frac{1}{6}\ln(\sqrt{2}-t)+\frac{1}{3}\ln(2t+\sqrt{2})\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1$$
(il faut prendre garde que $t-\sqrt{2}$ est négatif sur l'intervalle considéré). On trouve alors :
$$I=\frac{1}{6}\ln(\sqrt{2}-1)+\frac{1}{3}\ln(2+\sqrt{2})-\frac{1}{2}\ln(\sqrt{2})-\frac{1}{6}\ln\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{3}\ln(2\sqrt{2}).$$
Ceci peut encore se simplifier, mais c'est sans grand intérêt...
2. Aucune des règles de Bioche ne s'applique, et on est conduit à poser $u=\tan(x/2)$, de sorte que
$$dx=\frac{2du}{1+u^2}.$$
L'intégrale devient
$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{2+\sin x}&=\int_0^1\frac{1}{2+\frac{2u}{1+u^2}}\times\frac{2du}{1+u^2}\\&=\int_0^1\frac{du}{u^2+u+1}\\&=\int_0^1\frac{du}{\left(u+\frac{1}{2}\right)^{1/2}+\frac{3}{4}}\\&=\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{2u+1}{\sqrt{3}}\right]_0^1\\&=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Exercice 17 - Intégrale trigonométrique - Niveau 3 - *L1/Math Sup* - ⋆⋆⋆

1. La fonction $x \mapsto \frac{1-\cos(x/3)}{\sin(x/2)}$ est continue sur $]0,\pi]$, et elle se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0)=0$ (on a $f(x)\sim_0 x/9$). On commence par effectuer le changement de variables $t=x/6$, de sorte que, notant I l'intégrale,
$$I=\int_0^{\pi/6}\frac{1-\cos(2t)}{\sin(3t)}6dt=12\int_0^{\pi/6}\frac{\sin^2 t}{3\sin t-4\sin^3 t}dt,$$
soit encore, après simplification :
$$I=12\int_0^{\pi/6}\frac{\sin t}{4\cos^2 t-1}dt.$$
On effectue alors le changement de variables $u=\cos t$, de sorte que $du=-\sin t dt$, et
$$I=-12\int_{\sqrt{3}/2}^1\frac{du}{4u^2-1}=-6\int_2^{\sqrt{3}}\frac{dv}{v^2-1}.$$
Écrivant $\frac{2}{v^2-1}=\frac{1}{v-1}-\frac{1}{v+1}$, puis intégrant, on trouve
$$I=-3\left[\ln\left|\frac{1+v}{1-v}\right|\right]_2^{\sqrt{3}}=3\ln\left(\frac{2+\sqrt{3}}{3}\right).$$
2. La règle de Bioche nous dit que le changement de variables approprié est $u=\cos x$. Pour le faire apparaitre, on écrit
$$\frac{dx}{\sin x+\sin 2x}=\frac{dx}{\sin x(1+2\cos x)}=\frac{\sin x dx}{(1-\cos^2 x)(1+2\cos x)}.$$
On obtient, notant J l'intégrale,
$$J=\int_0^{1/2}\frac{du}{(1-u)(1+u)(1+2u)}.$$
On décompose la fraction rationnelle obtenue en éléments simples :
$$\frac{1}{(1-u)(1+u)(1+2u)}=\frac{1/6}{1-u}-\frac{1/2}{1+u}+\frac{4/3}{1+2u}.$$
On peut alors finir le calcul de J :
$$\begin{aligned}J&=\left[-\frac{1}{6}\ln|1-u|-\frac{1}{2}\ln|1+u|+\frac{2}{3}\ln|1+2u|\right]_0^{1/2}\\&=\frac{2}{3}\ln 2+\frac{1}{6}\ln 3.\end{aligned}$$

Intégrales abéliennes

Exercice 18 - Intégrales abéliennes - Niveau 1 - *Math Sup/L1* - ⋆

1. La fonction est définie et continue sur $[-2,+\infty[\backslash\{-1\}$. Le calcul sera donc valable sur les intervalles $[-2,-1[$ et $]-1,+\infty[$. On effectue le changement de variables $u=\sqrt{x+2}$, puisque la fonction $x\mapsto\sqrt{x+2}$ est bijective et C^∞ sur $]-2,+\infty[$, de sorte que $du=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}dx=\frac{dx}{2u}$. On en déduit :

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{1-\sqrt{x+2}}dx &= \int\frac{2u}{1-u}du\\ &= 2\int\left(\frac{1}{1-u}-1\right)du\\ &= 2\big(-\ln|1-u|-u\big)+C\\ &= -2\ln|1-\sqrt{x+2}|-2\sqrt{x+2}+C.\end{aligned}$$

2. La fonction est définie sur $]-1,1[$, et on effectue le changement de variables $x=\sin u$, avec $u\in[-\pi/2,\pi/2]$, de sorte que $dx=\cos u du$. On trouve :

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} &= \int\frac{\cos u}{\cos^2 u\cos u}du\\ &= \int\frac{du}{\cos^2 u}\\ &= \tan(u)+C\\ &= \frac{\sin u}{\cos u}+C\\ &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C.\end{aligned}$$

3. On pose $u=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$, de sorte que $x=\frac{u^2+1}{1-u^2}$ et $dx=\frac{4u}{(1-u^2)^2}$. On en déduit

$$\begin{aligned}\int\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx &= \int\frac{4u^2}{(1-u^2)}du\\ &= \int\left(\frac{1}{u-1}+\frac{1}{(u-1)^2}-\frac{1}{u+1}+\frac{1}{(u+1)^2}\right)du\\ &= -\frac{1}{u-1}+\ln|u-1|-\frac{1}{u+1}-\ln|1+u|+C\\ &= -\frac{1}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-1}+\ln\left|\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-1\right|-\frac{1}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+1}-\ln\left|1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right|+C\end{aligned}$$

Exercice 19 - Intégrale abélienne - Niveau 2 - *Math Sup/L1* - ⋆⋆

On commence par écrire le trinome sous forme canonique :

$$I=\int_1^2 x\sqrt{x^2-2x+5}dx=\int_1^2 x\sqrt{(x-1)^2+4}dx.$$

On trouve un terme de la forme $\sqrt{u^2+1}$, pour $(x-1)^2=4u^2$. Ceci nous incite à poser $u=\textrm{sh}(t)$, soit encore $x-1=2\textrm{sh}t$. En posant $\alpha=\textrm{Argsh}(1/2)$, on obtient

$$I=\int_0^\alpha(1+2\textrm{sh}t)\times 2\textrm{ch}t\times 2\textrm{ch}t dt=\int_0^\alpha 4\textrm{ch}^2t+8\int_0^\alpha\textrm{sh}(t)\textrm{ch}^2(t)dt.$$

Utilisant $2\mathrm{ch}^2(t) = 1 + \mathrm{ch}(2t)$, on obtient

$$I = 2\left[t + \frac{\mathrm{sh}(2t)}{2}\right]_0^\alpha + \frac{8}{3}\left[\mathrm{ch}^3 t\right]_0^\alpha = 2\alpha + \mathrm{sh}(2\alpha) + \frac{8}{3}\mathrm{ch}^3\alpha - \frac{8}{3}.$$

Ceci peut encore se simplifier en exprimant $\mathrm{sh}(2\alpha)$ en fonction de $\mathrm{sh}(\alpha)$ et $\mathrm{ch}(\alpha)$, ie $\mathrm{sh}(2\alpha) = 2\mathrm{sh}(\alpha)\mathrm{ch}(\alpha)$, et en remarquant que $\mathrm{ch}^2\alpha - \mathrm{sh}^2\alpha = 1$. On obtient finalement

$$I = 2\alpha + \frac{5\sqrt{5}}{3} - \frac{8}{3}.$$