Chapitre 4 : Calcul intégrale

Définition de l'intégrale

Exercice 4.1. Soit la fonction en escalier définie par

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{si} \quad x \in [-1,\ 1[; \\ -1, & \text{si} \quad x \in [1,\ 2[; \\ 3, & \text{si} \quad x \in [2,\ 4[; \\ 1, & \text{si} \quad x \in [4,\ 5]. \end{cases}$$

1) Tracer la courbe représentative de f.

2) Calculer $\displaystyle\int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{-1}^5 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4.2. 1) Calculer graphiquement $\displaystyle\int_{-4}^4 \sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x$.

2) Que vaut $\displaystyle\int_4^4 \sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x$?

Intégration numérique

Exercice 4.3. Estimer l'intégrale $\displaystyle\int_2^3 \sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x$, avec une subdivision régulière 'a $n = 4$ intervalles, en utilisant la méthode des rectangles.

Exercice 4.4. On approche l'intégrale $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x$ par la méthode des rectangles en utilisant une subdivision régulière à n intervalles.

1) Déterminer une borne supérieure pour l'erreur d'approximation si on utilise $n = 10$ et $n = 100$ intervalles.

2) Quel doit être la valeur minimum de n pour que l'erreur d'approximation soit majorée par $0,001$?

Linéarisation

Exercice 4.5. Calculer, selon les cas, l'intégrale ou toutes les primitives en précisant sur quels domaines elles sont calculées.

1) $\displaystyle\int \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 \mathrm{d}x$. 2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\cos(3x)\,\mathrm{d}x$.

3) $\displaystyle\int \mathrm{sh}^2\, x\,\mathrm{d}x$.

Intégration par parties

Exercice 4.6. Calculer, selon les cas, l'intégrale ou toutes les primitives en précisant sur quels domaines elles sont calculées.

1) $\displaystyle\int_0^1 xe^{2x}\,\mathrm{d}x$. 2) $\displaystyle\int \sin x\, e^{3x}\,\mathrm{d}x$. 3) $\displaystyle\int \operatorname{Arctan}(x)\,\mathrm{d}x$. (Indication : $v' = 1$.)

Changement de variables

Exercice 4.7. Calculer, selon les cas, l'intégrale ou toutes les primitives en précisant sur quels domaines elles sont calculées.

1) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$. 2) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{e^2-1}} \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$. 3) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{Arcsin} x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{(10-3e^x)^2}\,\mathrm{d}x$. 5) $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$.

Intégration des fractions rationnelles

Exercice 4.8. Calculer, selon les cas, l'intégrale ou toutes les primitives en précisant sur quels domaines elles sont calculées.

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+3}{(x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x$. 2) $\displaystyle\int \frac{4x^7+2x^4-2}{x^4-1}\,\mathrm{d}x$.

3) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x+1}{x^2-2x+1}\,\mathrm{d}x$. 4) $\displaystyle\int \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^3}\,\mathrm{d}x$.

(Voir la feuille de TD 2 pour la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles ce cet exercice.)

Primitives se ramenant à des primitives de fractions rationnelles

Exercice 4.9. Calculer les primitives en précisant sur quels domaines elles sont calculées.

1) $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x}{(2+\sin x)^2}\,\mathrm{d}x$. (Indication : $u = 2+\sin x$.)

2) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch} x}$. (Indication : $u = e^x$.) 3) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$. (Indication : $u = 1+\sqrt{x}$.)

Resumé des techniques d'intégration

Exercice 4.10. Calculer toutes les primitives en précisant sur quels domaines elles sont calculées.

1) $\displaystyle\int \sin^3 x\cos^3 x\,\mathrm{d}x$. 2) $\displaystyle\int \operatorname{ch}(2x)\operatorname{ch}(3x)\,\mathrm{d}x$. 3) $\displaystyle\int \frac{\ln^3 x}{x}\,\mathrm{d}x$.

4) $\displaystyle\int \ln(x^2-1)\,\mathrm{d}x$. (Indication : $v' = 1$.) 5) $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+2x}{x^3+x^2-x-1}\,\mathrm{d}x$.

6) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$. 7) $\displaystyle\int \frac{x+1}{e^x}\,\mathrm{d}x$. 8) $\displaystyle\int x^2\sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x$.

9) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+3e^x+2e^{2x}}$. 10) $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$. (Indication : intégration par parties.)

Exercice 4.11. (Pour aller plus loin) Calculer, selon les cas, l'intégrale ou toutes les primitives en précisant sur quels domaines elles sont calculées.

1) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3-1}$. 2) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x \cos^3 x}$. (Indication : $u=\tan x$.)

3) $\displaystyle\int \frac{3x^2-x+11}{(4+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$. 4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$. (Indication : $u=\tan(\frac{x}{2})$.)

COMPLÉMENTS

Définition de l'intégrale

Exercice 4.12. Soit $f(x)=8-\dfrac{x^2}{2}$ définie sur $[0,6]$.

1) Evaluez la somme de Riemmann $R_\sigma(f)$ en utilisant la subdivision de $[0,6]$ définie par les points

$$x_0=0,\ x_1=1.5,\ x_2=2.5,\ x_3=4.5,\ x_4=5,\ x_5=6$$

et en chosissant les points

$$w_0=1,\ w_1=2,\ w_2=3.5,\ w_3=5,\ w_4=5.5$$

des intervalles de la subdivision.
Quel est le pas de la subdivision ? Interpréter graphiquement cette somme de Riemann.

2) Pour un entier positif n on note σ_n la subdivision régulière de $[0,\ 6]$ en n sous-intervalles. Pour $n=6$, calculer la somme de Riemann R_{σ_6} en choisissant le point milieu de chaque intervalle. Comparer avec la valeur de $\int_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x$.

3) Que vaut la limite de R_{σ_n} quand n tend vers $+\infty$?

Intégration numérique

Exercice 4.13. Pour calculer une valeur approchée de $\dfrac{\pi}{4}$ on utilise la relation

$$\frac{\pi}{4}=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}.$$

On approche l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ par la méthode des rectangles en utilisant une subdivision régulière à n intervalles.

1) Quel doit être la valeur minimum de n pour obtenir une valeur approchée de $\dfrac{\pi}{4}$ à 10^{-3} près ?

2) Faire le calcul explicite d'une valeur approchée pour $n=20$.

Exercice 4.14. Un biologiste, chargé de la surveillance de la pollution thermique d'une rivière, relève la température (en $°C$) toutes les heures entre 9h et 17h.

Heure	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Température	24	25	28.3	29.3	30.3	30.2	27.2	25.8	23.9

À l'aide de la méthode des rectangles et de la définition de la moyenne, calculer la température moyenne de l'eau entre 9h et 17h.

Intégration par parties

Exercice 4.15. Soit $I_n = \int x^n e^x \, \mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}$.

1) Calculez I_0.
2) En intégrant par parties, déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}, $n \in \mathbb{N}$.
3) Calculez I_n, $n \in \mathbb{N}$.

Intégration des fractions rationnelles

Exercice 4.16. Calculer toutes les primitives en précisant sur quels domaines elles sont calculées. (Pour la décomposition en éléments simples de la deuxième fraction rationnelle voir la feuille de TD sur les fractions rationnelles.)

1) $\displaystyle\int \frac{x^3 - 2x}{x+1} \, \mathrm{d}x.$ 2) $\displaystyle\int \frac{x^6 - 2x^5 + x^4 - x^3 + 5x^2 - 4x + 1}{x^5 - 3x^4 + 3x^3 - x^2} \, \mathrm{d}x.$

Resumé des techniques d'intégration

Exercice 4.17. Calculer, selon les cas, l'intégrale ou toutes les primitives en précisant sur quels domaines elles sont calculées.

1) $\displaystyle\int x^2 \left(1 - \sqrt[3]{x}\right) \, \mathrm{d}x.$ 2) $\displaystyle\int x^2 \ln x \, \mathrm{d}x.$

3) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x(1 + \ln x)}.$ 4) $\displaystyle\int \mathrm{Arctan}\, x \, \mathrm{d}x.$

5) $\displaystyle\int \sin^3 x \, \mathrm{d}x.$ 6) $\displaystyle\int \sin^2 x \cos^3 x \, \mathrm{d}x$ et $\int \sin^5 x \cos^4 x \, \mathrm{d}x.$

7) $\displaystyle\int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{1 + \sqrt{x}}.$ 8) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{3x^2 + 2}.$

Exercice 4.18. Calculer, selon les cas, l'intégrale ou toutes les primitives en précisant sur quels domaines elles sont calculées.

1) $\displaystyle\int \frac{x^7}{(1 + x^4)^2} \, \mathrm{d}x.$ (Indication : $u = x^4$ puis fractions rationnelles.)

2) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}\,\left(\sqrt{x+1} + 1\right)}.$ (Indication : $u = \sqrt{x+1}$.)

3) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}\, x - \mathrm{ch}\, 2}.$

4) $\displaystyle\int_{\ln 3}^{\ln 8} \sqrt{e^x+1}\,\mathrm{d}x$. (Indication : $u=\sqrt{e^x+1}$.)

5) $\displaystyle\int \frac{x^2+6x+5}{x^2-6x+5}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4.19. (Pour aller plus loin) Calculer, selon les cas, l'intégrale ou toutes les primitives en précisant sur quels domaines elles sont calculées.

1) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{4+\cos x}$. (Indication : $u=\tan(\frac{x}{2})$.)

2) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3+4x-4x^2}}$. (Indication : ecrire $3+4x-4x^2$ sous forme $a(1-u^2)$.)

ANNALES

Exercice 4.20. (Extrait du contrôle continu de MM1 de novembre 2000.)

Trouver une primitive des fonctions suivantes

1) $f(x)=\left(e^x+e^{-2x}\right)^2$.

2) $g(x)=\sin x\,\sqrt{1+\cos x}$.

3) $h(x)=\dfrac{1}{x^2}\operatorname{Arctan} x$. (Indication : intégration par parties.)

Exercice 4.21. (Extrait du contrôle continu de MM1 de novembre 2001.)

1) Calculer $\displaystyle\int \operatorname{Arcsin} x\,\mathrm{d}x$.

2) Calculer $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x$.

3) Calculer $\displaystyle\int \sin^3 x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4.22. (Extrait de l'examen de MM1 de décembre 2000.)

Trouver une primitive de la fonction $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{\cos x(2+\tan^2 x)}$.

Exercice 4.23. (Extrait du contrôle continu de MM1 de septembre 2001.)

Soit le polynôme $P(X)=X^4-X^3-3X^2+5X-2$.

1) Trouver une racine évidente de P ; quelle est la multiplicité de cette racine ?

2) Donner la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ de ce polynôme.

3) Donner la décomposition théorique en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de la fraction rationnelle $F[X]=\dfrac{X^2+5}{P(X)}$ et calculer les coefficients de cette décomposition.

4) Trouver une primitive de $F(X)$.

Exercice 4.24. (Extrait de l'examen de MM1 de décembre 2001.)

Trouver une primitive sur $]-\pi,\pi[$ de la fonction $\dfrac{6\sin x-\sin(2x)}{(1+\cos x)(4-2\sin^2 x)}$.

Exercice 4.25. (Extrait de l'examen de MM1 de décembre 2003.)

1) Calculer $\displaystyle\int \frac{x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$.

2) Donner la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de la fraction rationnelle $f(x) = \dfrac{2x^2-3x+2}{(1+x^2)^2}$.

3) En déduire une primitive de $f(x)$.

4) En utilisant un changement de variables et en utilisant 3) calculer

$$\int \frac{(2e^{2x}-3e^x+2)e^x}{(1+e^{2x})^2}\,\mathrm{d}x.$$