Exercices supplémentaires - Calcul intégral

Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^x \arctan t\ dt$ **b)** $\displaystyle\int_0^x \tan^2 t\ dt$ **c)** $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{t\ln t}\ dt$ **d)** $\displaystyle\int_0^x \frac{t}{\sqrt{t+1}}\ dt$

e) $\displaystyle\int_0^x \arcsin t\ dt$ **f)** $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{3+e^{-t}}\ dt$ **g)** $\displaystyle\int_1^x \frac{-1}{\sqrt{4t-t^2}}\ dt$ **h)** $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t\sqrt{1-\ln^2 t}}\ dt$

i) $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+e^t}}\ dt$ **j)** $\displaystyle\int_0^x \frac{t-1}{t^2+t+1}\ dt$ **k)** $\displaystyle\int_5^x \frac{t+2}{t^2-3t-4}\ dt$ **l)** $\displaystyle\int_0^x \cos t\ e^t\ dt$

Indications :

c) Faire le changement de variable : $u = \ln t$.
d) Faire le changement de variable : $u = \sqrt{t+1}$ ou une intégration par parties.
f) Faire le changement de variable : $u = e^t$.
g) Faire le changement de variable : $u = \frac{1}{2}t - 1$.
h) Faire le changement de variable : $u = \ln t$.
i) Faire le changement de variable : $u = \sqrt{e^t+1}$.
k) Faire la décomposition en éléments simples.
l) Faire deux intégrations par parties.

Exercice 2. Calculer les primitives suivantes :

$$\int_0^x \frac{\sin t}{\sin t + \cos t}\ dt \quad \text{et} \quad \int_0^x \frac{\cos t}{\sin t + \cos t}\ dt.$$

Indication :
Calculer la somme et la différence de ces deux intégrales.

Exercice 3. Calculer les primitives suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^x \sin^2 t \cos^3 t\ dt$ **b)** $\displaystyle\int_0^x \cos^4 t\ dt$ **c)** $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+\sin t+\cos t}\ dt$ **d)** $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}\ dx$

e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x}\ dx$ **f)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{7+\tan x}\ dx$

Indications :

a), b) Linéarisation.
c) Faire le changement de variable $u = \cos x$ ou $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.
d) Faire le changement de variable $u = \cos x$ ou $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.
e) Faire le changement de variable $u = \sin x$.
f) Faire le changement de variable $u = \tan x$.

Exercice 4. Calculer les intégales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\arctan x\,dx$ **c)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$ **e)** $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$ **f)** $\displaystyle\int_1^2 x^2\ln x\,dx$

g) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+4x+7}\,dx$ **h)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)^2}\,dx$

Indications :

b) Faire le changement de variable $u=\frac{1}{x}$ puis utiliser l'égalité $\arctan(x)+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$ pour $x>0$.
d) Faire un changement de variables ou une intégration par parties.
e) Faire le changement de variables $u=\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$.
h) Faire la décomposition en éléments simples).

Source : `http://math.univ-lille1.fr/~bodin/exo4/selcor.html`

Solutions

Exercice 1.
a) $x\arctan x-\frac{1}{2}\ \ln(1+x^2)$, **b)** $\tan x-x$, **c)** $\ln(\ln 3)-\ln(\ln 2)$, **d)** $\frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x+1}+\frac{4}{3}$,
e) $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}-1$, **f)** $\frac{1}{3}\left(\ln(1+3e^x)-\ln 4\right)$, **g)** $\frac{1}{2}\ \arcsin(\sqrt{1-x})$, **h)** $\arcsin(\ln x)$,
i) $\ln(\sqrt{e^x+1})-\ln(\sqrt{2})$, **j)** $\frac{1}{2}\ \ln(x^2+x+1)-\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\ x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\sqrt{3}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$,
k) $\frac{1}{5}\ \ln(x-4)-\frac{1}{5}\ \ln(x+1)+\frac{1}{5}\ \ln(6)$, **l)** $\frac{1}{2}(\sin(x)e^x+\cos(x)e^x-1)$.

Exercice 2. La somme vaut x et la différence $-\ln(\sin x+\cos x)$ donc la première intégrale vaut $\frac{1}{2}(x-\ln(\sin x+\cos x))$ et la seconde $\frac{1}{2}(x+\ln(\sin x+\cos x))$.

Exercice 3.

a) On a $\sin^2 x\cos^3 x=\frac{1}{8}\cos x-\frac{1}{16}\cos(5x)-\frac{1}{16}\cos(3x)$ donc la primitive est $\frac{1}{8}\sin x-\frac{1}{80}\sin(5x)-\frac{1}{48}\sin(3x)$.
b) On a $\cos^4 x=\frac{1}{8}\cos(4x)+\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{9}{8}$ donc la primitive est $\frac{1}{32}\sin(4x)+\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{9}{8}\ x$.
c) Si $u=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$, alors $\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$, $\sin x=\frac{2u}{1+u^2}$ et $dx=\frac{2du}{1+u^2}$. Alors on obtient que l'intégrale vaut $\sqrt{2}\arctan(\sqrt{2})$.
d) $-\frac{1}{2}\ln(3)$
e) $\frac{1}{2}\ln(3)$
f) $\frac{1}{50}\left[\ln\left(\frac{8}{7}\right)-\frac{2}{2}\ln 2+\frac{7\pi}{6}\right]$.

Exercice 4.
a) $\frac{\pi^2}{72}$, **b)** $\frac{3\pi}{4}$, **c)** 1, **d)** $\frac{\pi}{12}\ +\ \frac{1}{4}$, **e)** $\frac{2\pi}{3}\ -\ \frac{\sqrt{3}}{2}$, **f)** $\frac{8}{3}\ln(2)-\frac{7}{9}$,
g) $\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\arctan\left(\sqrt{3}\right)-\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{3}-(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3})\right)=\frac{\sqrt{3}\pi}{18}$, **h)** $3\ln 2-1$.