

# Les opérateurs logiques

## 1) Les fonctions de base :

### 1-1) La fonction NON

Symbole :

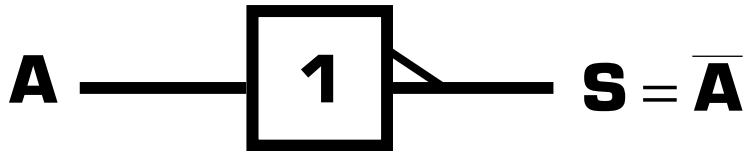


Table de vérité	
A	S
0	1
1	0

*Remarque :*

S est le complément de A

### 1-2) La fonction ET

Symbole :

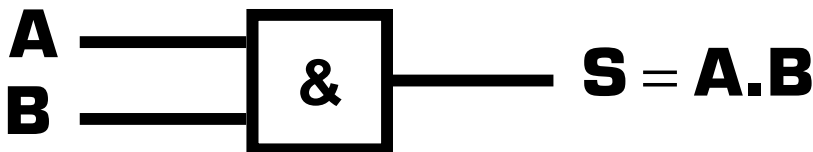


Table de vérité ET		
A	B	S
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

*Remarques :*

S vaut 1 ssi toutes les entrées sont à 1

S vaut 0 à partir du moment où une entrée est à 0

Une porte ET peut avoir plus de 2 entrées [2, 3, 4 entrées, ou plus].

### 1-3) La fonction OU

Symbole :

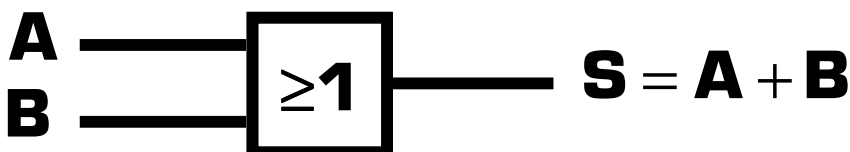


Table de vérité <b>OU</b>		
A	B	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

*Remarques :*

S vaut 0 ssi toutes les entrées sont à 0

S vaut 1 à partir du moment où une entrée est à 1

Une porte OU peut avoir plus de 2 entrées [2, 3, 4 entrées, ou plus].

#### 1-4) La fonction ET-NON

Symbole :

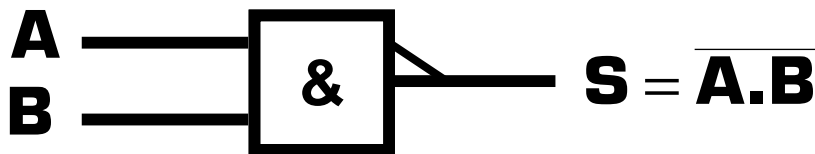


Table de vérité <b>ET - NON</b>		
A	B	S
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

*Remarques :*

S vaut 0 ssi toutes les entrées sont à 1

S vaut 1 à partir du moment où une entrée est à 0

Une porte ET-NON est simplement une porte ET suivie d'une porte NON

#### 1-5) La fonction OU-NON

Symbole :

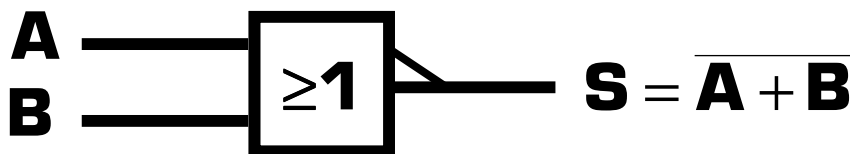


Table de vérité <b>OU - NON</b>		
A	B	S
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

*Remarques :*

S vaut 1 ssi toutes les entrées sont à 0

S vaut 0 à partir du moment où une entrée est à 1

Une porte OU-NON est simplement une porte OU suivie d'une porte NON

## 2) Propriétés de l'algèbre de Boole :

[George BOOLE était un mathématicien britannique, 1815 – 1864]

13 propriétés, dont 4 fondamentales [en **GRAS**] :

- La commutativité :  $A.B = B.A$   
 $A+B = B+A$
- L'associativité :  $[A.B].C = A.[B.C]$   
 $[A+B]+C = A+[B+C]$
- La priorité :  $A+B.C = A+[B.C]$   
Le ET est prioritaire devant le OU [comme en arithmétique, la multiplication est prioritaire devant l'addition]
- La distributivité :  $A.[B+C] = [A.B] + [A.C] = A.B+A.C$   
Distributivité de la multiplication, comme en arithmétique

$$\mathbf{A+(B.C) = (A+B).(A+C)}$$

**En logique, il y a distributivité de l'addition [ce qui n'est pas du tout le cas en arithmétique]**

- Les éléments neutres :  $A.1 = A$   
 $A+0 = A$
- Les éléments absorbants :  $A.0 = 0$   
 $A+1 = 1$
- La complémentarité :  $A.\bar{A} = 0$   
 $A+\bar{A} = 1$
- L'idempotence :  $A.A = A$   
 $A+A = A$   
A peut être une expression
- Théorème d'involution :  $\bar{\bar{A}} = A$   
 $\bar{\bar{\bar{A}}} = \bar{A}$
- Théorème d'inclusion :  $A.B + A.\bar{B} = A$   
 $[A+B].[A+\bar{B}] = A$

Démonstration : mettre A en facteur [distributivité « à l'envers »] :

$$A.B + A.\bar{B} = A.(B + \bar{B}) = A$$

$$[A+B].[A+\bar{B}] = A + B.\bar{B} = A$$

- **Théorème d'allégement** :  $A.(\bar{A} + B) = A.B$   
 $A + \bar{A}.B = A + B$

Démonstration : utiliser la distributivité [du ET et du OU] :

$$A.(\bar{A} + B) = A.\bar{A} + A.B = A.B$$

$$A + \bar{A}.B = [A + \bar{A}].(A + B) = A + B$$

- **Théorème d'absorption** :  $A.(A + B) = A$   
 $A + (A.B) = A$

Démonstration par la distributivité du ET [*utilisée dans les 2 sens*] :

$$A.(A + B) = A.A + A.B \quad [\text{distributivité du ET}]$$

$$= A + A.B \quad [2^{\text{ème}} \text{ forme du théorème d'absorption}]$$

$$= A.(B + 1) \quad [\text{mise en facteur de } A : \text{distributivité du ET « à l'envers »}]$$

$$= A.1$$

$$= A$$

Démonstration par la distributivité du OU [*utilisée dans les 2 sens*] :

$$A + A.B = [A + A].(A + B) \quad [\text{distributivité du OU}]$$

$$= A.(A + B) \quad [1^{\text{ère}} \text{ forme du théorème d'absorption}]$$

$$= [A + 0].(A + B) \quad [\text{pour } y \text{ voir plus clair dans ce qui va suivre ...}]$$

$$= A + [B.0] \quad [\text{distributivité du OU à l'envers : « factorisation par l'addition »}]$$

$$= A + 0$$

$$= A$$

- **Théorème de De Morgan** :  $\overline{A.B} = \bar{A} + \bar{B} \rightarrow$  porte ET-NON

$$\overline{A + B} = \bar{A} . \bar{B} \rightarrow \text{porte OU-NON}$$

### Exemples d'application :

Utilisation de la distributivité du OU [« à l'envers »] :

$$[B + \bar{C}].(A + B) = ? = B + A.\bar{C}$$

Simplification par le théorème d'absorption :

$$E + F + \bar{D}.C.(E + F).(D + \bar{E}).B.\bar{A}.\text{etc...} = ? = E + F$$

## 3) Les fonctions OU-Exclusif et OU-Exclusif-NON :

### 3-1) La fonction OU-Exclusif

Symbole :

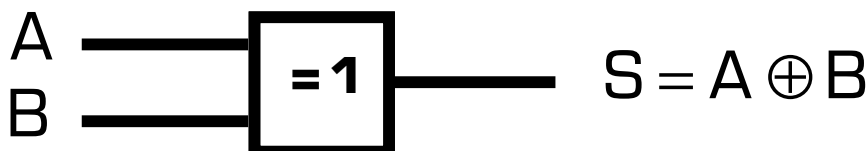


Table de vérité <b>OU -Exclusif</b>		
A	B	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

*Remarques :*

S vaut 0 ssi les deux entrées sont égales

S vaut 1 ssi les deux entrées ont des valeurs différentes

**Une porte OU-Exclusif a toujours 2 entrées** [ni plus, ni moins]

### 3-2) La fonction OU-Exclusif-NON

Symbole :

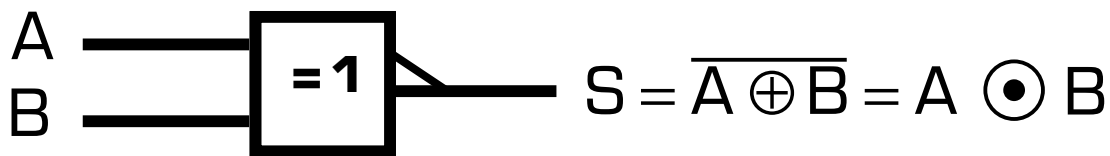


Table de vérité <b>OU -Exclusif -NON</b>		
A	B	S
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

*Remarques :*

S vaut 1 ssi les deux entrées sont égales

S vaut 0 ssi les deux entrées ont des valeurs différentes

Une porte OU-Exclusif-NON est simplement une porte OU-Exclusif suivie d'une porte NON

### 3-3) Equations autour du OU-Eclusif :

Comme le montre les tables de vérité, on a :

$$A \oplus B = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}$$

Et :

$$A \odot B = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}$$

Autres expressions des OU-Exclusifs :

$$A \oplus B = \overline{A \odot B} = [A + B] \cdot [\overline{A} + \overline{B}]$$

$$A \odot B = \overline{A \oplus B} = [\overline{A} + B] \cdot [A + \overline{B}]$$