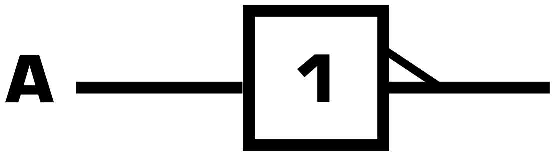
Les opérateurs logiques

1) Les fonctions de base :

1-1) La fonction NON

Symbole :



$$S = \overline{A}$$

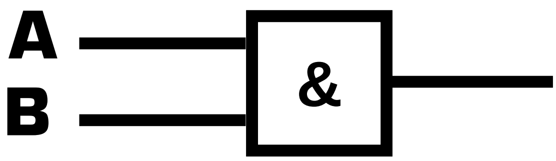
Table de vérité	
A	S
0	1
1	0

Remarque :

S est le complément de A

1-2) La fonction ET

Symbole :



$$S = A.B$$

Table de vérité **ET**		
A	B	S
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Remarques :

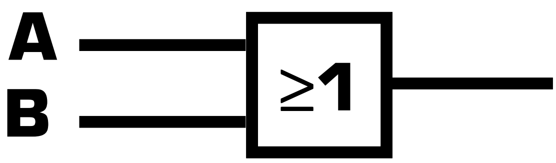
S vaut 1 ssi toutes les entrées sont à 1

S vaut 0 à partir du moment où une entrée est à 0

Une porte ET peut avoir plus de 2 entrées (2, 3, 4 entrées, ou plus).

1-3) La fonction OU

Symbole :



$$S = A + B$$

Table de vérité **OU**		
A	B	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Remarques :

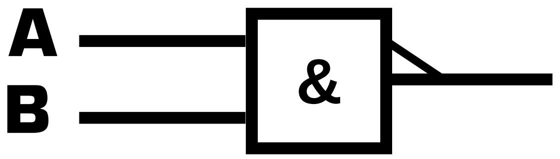
S vaut 0 ssi toutes les entrées sont à 0

S vaut 1 à partir du moment où une entrée est à 1

Une porte OU peut avoir plus de 2 entrées (2, 3, 4 entrées, ou plus).

1-4) La fonction ET-NON

Symbole :



$$S = \overline{A.B}$$

Table de vérité **ET - NON**		
A	B	S
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Remarques :

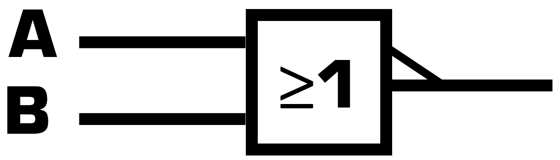
S vaut 0 ssi toutes les entrées sont à 1

S vaut 1 à partir du moment où une entrée est à 0

Une porte ET-NON est simplement une porte ET suivie d'une porte NON

1-5) La fonction OU-NON

Symbole :



$$S = \overline{A + B}$$

Table de vérité **OU - NON**		
A	B	S
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Remarques :

S vaut 1 ssi toutes les entrées sont à 0

S vaut 0 à partir du moment où une entrée est à 1

Une porte OU-NON est simplement une porte OU suivie d'une porte NON

2) Propriétés de l'algèbre de Boole :

(George BOOLE était un mathématicien britannique, 1815 – 1864)

13 propriétés, dont 4 fondamentales (en **GRAS**) :

- La commutativité : $A.B = B.A$
  $A+B = B+A$

- L'associativité : $(A.B).C = A.(B.C)$
  $(A+B)+C = A+(B+C)$

- La priorité : $A+B.C = A+(B.C)$
  Le ET est prioritaire devant le OU (comme en arithmétique, la multiplication est prioritaire devant l'addition)

- La distributivité : $A.(B+C) = (A.B) + (A.C) = A.B+A.C$
  Distributivité de la multiplication, comme en arithmétique

  $$\mathbf{A+(B.C) = (A+B).(A+C)}$$

  En logique, il y a distributivité de l'addition (ce qui n'est pas du tout le cas en arithmétique)

- Les éléments neutres : $A.1 = A$
  $A+0 = A$

- Les éléments absorbants : $A.0 = 0$
  $A+1 = 1$

- La complémentarité : $A.\overline{A}=0$
  $A+\overline{A}=1$

- L'idempotence : $A.A=A$
  $A+A=A$
  A peut être une expression

- Théorème d'involution : $\overline{\overline{A}}=A$
  $\overline{\overline{\overline{A}}}=\overline{A}$

- Théorème d'inclusion : $A.B+A.\overline{B}=A$
  $(A+B).(A+\overline{B})=A$

  Démonstration : mettre A en facteur (distributivité « à l'envers ») :

  $$A.B+A.\overline{B}=A.(B+\overline{B})=A$$

  $$(A+B).(A+\overline{B})=A+B.\overline{B}=A$$

- **Théorème d'allégement** : $\mathbf{A.(\overline{A}+B)=A.B}$

  $\mathbf{A+\overline{A}.B=A+B}$

  Démonstration : utiliser la distributivité (du ET et du OU) :

  $A.(\overline{A}+B)=A.\overline{A}+A.B=A.B$

  $A+\overline{A}.B=(A+\overline{A}).(A+B)=A+B$

- **Théorème d'absorption** : $\mathbf{A.(A+B)\ =\ A}$

  $\mathbf{A+(A.B)\ =\ A}$

  Démonstration par la distributivité du ET (*utilisée dans les 2 sens*) :

  $A.(A+B)\ =\ A.A\ +\ A.B$ (distributivité du ET)

  $=\ A\ +\ A.B$ (2ème forme du théorème d'absorption)

  $=\ A.(B+1)$ (mise en facteur de A : distributivité du ET « à l'envers »)

  $=\ A.1$

  $=\ A$

  Démonstration par la distributivité du OU (*utilisée dans les 2 sens*) :

  $A+A.B\ =\ (A+A).(A+B)$ (distributivité du OU)

  $=\ A.(A+B)$ (1ère forme du théorème d'absorption)

  $=\ (A+0).(A+B)$ (pour y voir plus clair dans ce qui va suivre …)

  $=\ A\ +\ (B.0)$ (distributivité du OU à l'envers : « factorisation par l'addition »)

  $=\ A+0$

  $=A$

- **Théorème de De Morgan** : $\mathbf{\overline{A.B}=\overline{A}+\overline{B}}$ ➡ porte ET-NON

  $\mathbf{\overline{A+B}=\overline{A}\ .\ \overline{B}}$ ➡ porte OU-NON

Exemples d'application :

Utilisation de la distributivité du OU (« à l'envers ») :

$(B+\overline{C}).(A+B)=?=B+A.\overline{C}$

Simplification par le théorème d'absorption :

$E+F+\overline{D}.C.(E+F).(D+\overline{E}).B.\overline{A}.etc\ldots=?=E+F$

3) Les fonctions OU-Exclusif et OU-Exclusif-NON :

3-1) La fonction OU-Exclusif

Symbole :

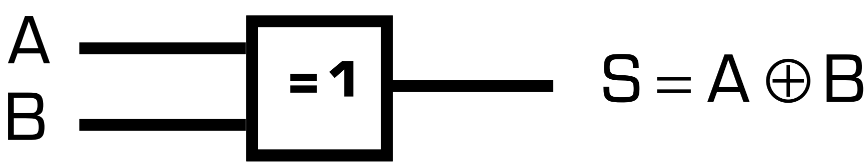


Table de vérité **OU -Exclusif**		
A	B	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Remarques :

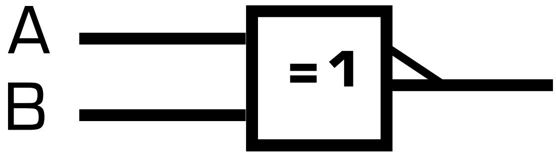
S vaut 0 ssi les deux entrées sont égales

S vaut 1 ssi les deux entrées ont des valeurs différentes

Une porte OU-Exclusif a toujours 2 entrées (ni plus, ni moins)

3-2) La fonction OU-Exclusif-NON

Symbole :



$$S = \overline{A \oplus B} = A \odot B$$

Table de vérité **OU–Exclusif–NON**		
A	B	S
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Remarques :

S vaut 1 ssi les deux entrées sont égales

S vaut 0 ssi les deux entrées ont des valeurs différentes

Une porte OU-Exclusif-NON est simplement une porte OU-Exclusif suivie d'une porte NON

3-3) Equations autour du OU-Eclusif :

Comme le montre les tables de vérité, on a :

$$A \oplus B = \overline{A}.B + A.\overline{B}$$

Et :

$$A \odot B = A.B + \overline{A}.\overline{B}$$

Autres expressions des OU-Exclusifs :

$$A \oplus B = \overline{A \odot B} = (A + B).(\overline{A} + \overline{B})$$

$$A \odot B = \overline{A \oplus B} = (\overline{A} + B).(A + \overline{B})$$