

## Toutes les relations de l'algèbre de Boole

*George BOOLE était un mathématicien britannique, 1815 – 1864*

Il y a 13 relations, dont 4 fondamentales [en **GRAS**].

### I - Les propriétés de l'algèbre de Boole

- La commutativité :  $A.B = B.A$   
 $A+B = B+A$
- L'associativité :  $[A.B].C = A.[B.C]$   
 $[A+B]+C = A+[B+C]$
- La priorité :  $A+B.C = A+[B.C]$   
Le ET est prioritaire devant le OU [comme en arithmétique, la multiplication est prioritaire devant l'addition]
- La distributivité :  $A.[B+C] = [A.B] + [A.C] = A.B+A.C$   
Distributivité de la multiplication, comme en arithmétique

$$\mathbf{A+(B.C) = (A+B).(A+C)}$$

**En logique, il y a distributivité de l'addition (ce qui n'est pas du tout le cas en arithmétique)**

- Les éléments neutres :  $A.1 = A$   
 $A+0 = A$
- Les éléments absorbants :  $A.0 = 0$   
 $A+1 = 1$
- La complémentarité :  $A.\bar{A} = 0$   
 $A+\bar{A} = 1$
- L'idempotence :  $A.A = A$   
 $A+A = A$

**Penser que A peut être une expression logique**

## II - Les théorèmes de l'algèbre de Boole

- Théorème d'involution :  $\overline{\overline{A}} = A$   
 $\overline{\overline{\overline{A}}} = \overline{A}$
- Théorème d'inclusion :  $A.B + A.\overline{B} = A$   
 $[A + B].[A + \overline{B}] = A$

Démonstration : mettre A en facteur [distributivité « à l'envers »] :

$$A.B + A.\overline{B} = A.[B + \overline{B}] = A$$

$$[A + B].[A + \overline{B}] = A + B.\overline{B} = A$$

- **Théorème d'allègement** :  $A.[\overline{A} + B] = A.B$   
 $A + \overline{A}.B = A + B$

Démonstration : utiliser la distributivité [du ET et du OU] :

$$A.[\overline{A} + B] = A.\overline{A} + A.B = A.B$$

$$A + \overline{A}.B = [A + \overline{A}].[A + B] = A + B$$

- **Théorème d'absorption** :  $A.(A + B) = A$   
 $A + [A.B] = A$

Démonstration par la distributivité du ET [utilisée dans les 2 sens] :

$$A.(A + B) = A.A + A.B \quad \text{[distributivité du ET]}$$

$$= A + A.B \quad \text{[2<sup>ème</sup> forme du théorème d'absorption]}$$

$$= A.[B + 1] \quad \text{[mise en facteur de A : distributivité du ET « à l'envers »]}$$

$$= A.1$$

$$= A$$

Démonstration par la distributivité du OU [utilisée dans les 2 sens] :

$$A + A.B = [A + A].[A + B] \quad \text{[distributivité du OU]}$$

$$= A.[A + B] \quad \text{[1<sup>ère</sup> forme du théorème d'absorption]}$$

$$= [A + 0].[A + B] \quad \text{[pour y voir plus clair dans ce qui va suivre ...]}$$

$$= A + [B.0] \quad \text{[distributivité du OU à l'envers : « factorisation par l'addition »]}$$

$$= A + 0$$

$$= A$$

- **Théorème de De Morgan** :  $\overline{A.B} = \overline{A} + \overline{B} \rightarrow$  porte ET-NON

$$\overline{A + B} = \overline{A} . \overline{B} \rightarrow$$
 porte OU-NON