Toutes les relations de l'algèbre de Boole

George BOOLE était un mathématicien britannique, 1815 – 1864

Il y a 13 relations, dont 4 fondamentales (en **GRAS**).

I – Les propriétés de l'algèbre de Boole

- La commutativité : $A.B = B.A$
  $A+B = B+A$

- L'associativité : $(A.B).C = A.(B.C)$
  $(A+B)+C = A+(B+C)$

- La priorité : $A+B.C = A+(B.C)$
  Le ET est prioritaire devant le OU (comme en arithmétique, la multiplication est prioritaire devant l'addition)

- La distributivité : $A.(B+C) = (A.B) + (A.C) = A.B+A.C$
  Distributivité de la multiplication, comme en arithmétique

  $$\mathbf{A+(B.C) = (A+B).(A+C)}$$
  En logique, il y a distributivité de l'addition (ce qui n'est pas du tout le cas en arithmétique)

- Les éléments neutres : $A.1 = A$
  $A+0 = A$

- Les éléments absorbants : $A.0 = 0$
  $A+1 = 1$

- La complémentarité : $A.\overline{A}=0$
  $A+\overline{A}=1$

- L'idempotence : $A.A=A$
  $A+A=A$

Penser que A peut être une expression logique

II – Les théorèmes de l'algèbre de Boole

- Théorème d'involution : $\overline{\overline{A}} = A$

  $\overline{\overline{\overline{A}}} = \overline{A}$

- Théorème d'inclusion : $A.B + A.\overline{B} = A$

  $(A + B).(A + \overline{B}) = A$

  Démonstration : mettre A en facteur (distributivité « à l'envers ») :

  $A.B + A.\overline{B} = A.(B + \overline{B}) = A$

  $(A + B).(A + \overline{B}) = A + B.\overline{B} = A$

- **Théorème d'allégement** : $\mathbf{A.(\overline{A} + B) = A.B}$

  $\mathbf{A + \overline{A}.B = A + B}$

  Démonstration : utiliser la distributivité (du ET et du OU) :

  $A.(\overline{A} + B) = A.\overline{A} + A.B = A.B$

  $A + \overline{A}.B = (A + \overline{A}).(A + B) = A + B$

- **Théorème d'absorption** : $\mathbf{A.(A + B) = A}$

  $\mathbf{A + (A.B) = A}$

Démonstration par la distributivité du ET (*utilisée dans les 2 sens*) :

$A.(A + B) = A.A + A.B$ (distributivité du ET)

$= A + A.B$ (2ème forme du théorème d'absorption)

$= A.(B + 1)$ (mise en facteur de A : distributivité du ET « à l'envers »)

$= A.1$

$= A$

Démonstration par la distributivité du OU (*utilisée dans les 2 sens*) :

$A + A.B = (A + A).(A + B)$ (distributivité du OU)

$= A.(A + B)$ (1ère forme du théorème d'absorption)

$= (A + 0).(A + B)$ (pour y voir plus clair dans ce qui va suivre …)

$= A + (B.0)$ (distributivité du OU à l'envers : « factorisation par l'addition »)

$= A + 0$

$= A$

- **Théorème de De Morgan** : $\mathbf{\overline{A.B} = \overline{A} + \overline{B}}$ ➡ porte ET-NON

  $\mathbf{\overline{A + B} = \overline{A} . \overline{B}}$ ➡ porte OU-NON