CORRECTION

Section : **S**	Option : ***Sciences de l'ingénieur***		Discipline : ***Génie Électrique***
Exercices d'application de l'algèbre de Boole			
Domaine d'application : **Les systèmes logiques**	Type de document : **Exercice**	Classe : **Première**	Date :

I – Équations logiques, tables de vérité, et algèbre de Boole

I - 1 - On donne l'équation logique suivante : $S = \overline{A+B}$

Cette équation correspond à la sortie de quelle fonction logique ? OU - NON

1 - Complétez la table de vérité de S à partir de son équation :

A	B	S
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

2 - D'après cette table de vérité, donnez une nouvelle équation logique de S :

$\overline{A} . \overline{B}$

3 - En déduire une propriété de l'algèbre de Boole :

$\overline{A+B} = \overline{A} . \overline{B}$

I - 2 - On donne l'équation logique suivante : $S = \overline{A}.\overline{B} + \overline{A}.B + A.\overline{B}$

1 - Complétez la table de vérité de S à partir de son équation :

A	B	S
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

2 - D'après la table de vérité, reconnaissez-vous une fonction logique particulière ? Donnez une nouvelle équation de S :

ET – NON

3 - En déduire une nouvelle propriété de l'algèbre de Boole :

$\overline{A}.\overline{B} + \overline{A}.B + A.\overline{B} = \overline{A.B}$

Démontrez cette égalité en utilisant les propriétés de l'algèbre de Boole :

1	$S = \overline{A}.\overline{B} + \overline{A}.B + A.\overline{B}$	5	$S = \overline{A.B}$
2	$S = \overline{A}\,(\overline{B} + B) + A.\overline{B}$	6	S =
3	$S = \overline{A} + A.\overline{B}$ allègement	7	S =
4	$S = \overline{A} + \overline{B}$	8	S =

I - 3 - On donne l'équation logique suivante : $S = \overline{A}.B + A.\overline{B} + A.B$

1 - Complétez sur la page 2 la table de vérité de S à partir de son équation.

2 - D'après la table de vérité, reconnaissez-vous une fonction logique particulière ? Donnez alors une nouvelle équation de S :

$S = A + B$

A	B	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

3 - En déduire une nouvelle propriété de l'algèbre de Boole :

$\overline{A}.B + A.\overline{B} + A.B = A + B$

Démontrez cette égalité en utilisant les propriétés de l'algèbre de Boole :

1	$S = \overline{A}.B + A.\overline{B} + A.B$	5	S = $1.(A+B)$
2	S = $\overline{A}.B + A.(\overline{B}+B)$	6	S = $A+B$
3	S = $\overline{A}.B + A$	7	S = ...
4	S = $(A+\overline{A}).(A+B)$	8	S = ...

I - 4 - On donne l'équation logique suivante : $S = [A+B]+[A.B]$

1 - Complétez la table de vérité de S à partir de son équation :

A	B	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

2 - D'après la table de vérité, reconnaissez-vous une fonction logique particulière ? Donnez une nouvelle équation de S :

$S = A+B$

3 - En déduire une nouvelle propriété de l'algèbre de Boole :

$A + B + A.B = A + B$

Démontrez cette égalité en utilisant les propriétés de l'algèbre de Boole :

1	$S = [A+B]+[A.B]$	5	S = $A+B$
2	S = $A + B.1 + A.B$	6	S = ...
3	S = $A + B.(1+A)$	7	S = ...
4	S = $A + B.1$	8	S = ...

II - Simplification d'équations

Simplifiez les équations logiques suivantes en utilisant les propriétés de l'algèbre de Boole et en précisant clairement le nom de la propriété utilisée à chaque transformation :

II - 1 - $W = [A.B+C+D].A.B = ?$ $A.B$

II - 2 - $X = [\overline{B}+\overline{A}].[A.C+\overline{B}] = ?$ $\overline{B}$

II - 3 - $Y = C.[B+C]+[A+D].[\overline{A}+D].\overline{C} = ?$ $C + D.\overline{C} = C + D$

II - 4 - $Z = A.C.[\overline{A}+B+\overline{C}] = ?$ $A.B.C$

III - Construction de la table de vérité et du logigramme à partir d'une équation

On donne l'équation de la sortie S d'un système logique à 3 entrées :

$$S = A.\overline{B}.C + \overline{A}.B.\overline{C} + \overline{A}.\overline{B}.C = \overline{B}.C(A+\overline{A}) + \overline{A}B\overline{C}$$

III - 1 - Complétez la table de vérité de S.

III - 2 - Proposez un logigramme correspondant à l'équation **non simplifiée** de S.

III - 3 -Simplifiez au maximum l'équation de S en utilisant les propriétés de l'algèbre de Boole. $S = \overline{B}.C + \overline{A}B.\overline{C}$

III - 4 - Proposez un nouveau logigramme correspondant à l'équation **simplifiée** de S.

A	B	C	S
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

IV - Étude d'une fonction logique à partir de son équation

On donne l'équation de la sortie H d'un système logique à 3 entrées :

(1) $H = \overline{X}.Y.\overline{Z} + \underbrace{(\overline{X}+Y).(Y+X)}_{Y \text{ (inclusion)}} + \underbrace{(X+Z).\overline{Z}}_{X.\overline{Z} \text{ (allègement)}}$

(2) $H = Y + \overline{Z}.\underbrace{(X + \overline{X}.Y)}_{X+Y \text{ (allègement)}}$

(3) $H = \underbrace{Y + \overline{Z}.Y}_{Y \text{ (absorption)}} + \overline{Z}.X$

IV - 1 - Simplifiez au maximum l'équation de H en utilisant les propriétés de l'algèbre de Boole. (4) $\boxed{H = Y + \overline{Z}.X}$

IV - 2 - Complétez la table de vérité de H à partir de son équation simplifiée.

IV - 3 - Proposez un logigramme correspondant à l'équation **simplifiée** de H, en utilisant seulement 3 portes logiques.

X	Y	Z	H
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

V - Étude d'une fonction logique à partir de sa table de vérité

On donne la table de vérité de la sortie G d'un système logique à 3 entrées R, S, et T :

V - 1 - A partir de cette table de vérité, dégagez une équation logique de la sortie G. $G = \overline{R}S\overline{T} + \overline{R}ST + R\overline{S}\,\overline{T} + RS\overline{T}$

V - 2 - Simplifiez cette équation en utilisant les propriétés de l'algèbre de Boole. $G = \overline{R}.S + R.\overline{T}$

V - 3 - Proposez un logigramme de G en utilisant seulement 4 portes logiques. DE MORGAN

$$G = \overline{R}.S + \overline{\overline{R}+T}$$

R	S	T	G
0	0	0	**0**
0	0	1	**0**
0	1	0	**1**
0	1	1	**1**
1	0	0	**1**
1	0	1	**0**
1	1	0	**1**
1	1	1	**0**

VI - Problèmes de logique

VI - 1 - Défense de fumer ou cracher :

Dans la cour de son lycée, Paul a lu sur le panneau d'affichage « ***Défense de fumer ou cracher*** ». On associe l'autorisation de « ***fumer*** » à la variable logique **F**, et l'autorisation de « ***cracher*** » à la variable logique **C**. L'interdiction de fumer s'écrit donc $\overline{\mathbf{F}}$, et l'interdiction de cracher s'écrit $\overline{\mathbf{C}}$.

1 - Le panneau « ***Défense de fumer ou cracher*** » exprime 2 interdictions distinctes. Lesquelles ? Utilisez les termes « ***il est interdit de*** » ainsi que « ***et*** » dans votre réponse.

2 - Comment écrire « ***Défense de fumer ou cracher*** » en fonction de **C** et de **F** ? $\overline{C+F}$

3 - Comment écrire « ***Défense de fumer ou cracher*** » en fonction de $\overline{\mathbf{C}}$ et de $\overline{\mathbf{F}}$? $\overline{C} \cdot \overline{F}$

4 - Déduire de ce problème une propriété de l'algèbre de Boole exprimant $\overline{\mathbf{C+F}}$ en fonction de $\overline{\mathbf{C}}$ et de $\overline{\mathbf{F}}$.

$\overline{C+F} = \overline{C} \cdot \overline{F}$

VI - 2 - Boire ou conduire, il faut choisir :

En allant passer son permis de conduire, Paul a lu sur la porte de l'auto-école « ***Il est interdit de boire et conduire*** ». On associe l'autorisation de « ***boire*** » à la variable logique **B**, et l'autorisation de « ***conduire*** » à la variable logique **C**.

1 - Comment écrire « ***Il est interdit de boire et conduire*** » en fonction de **B** et de **C** ? $\overline{B \cdot C}$

2 - Comment écrire « ***Il est interdit de boire et conduire*** » en fonction de $\overline{\mathbf{B}}$ et de $\overline{\mathbf{C}}$? $\overline{B} + \overline{C}$

3 - Déduire de ce problème une propriété de l'algèbre de Boole exprimant $\overline{\mathbf{B.C}}$ en fonction de $\overline{\mathbf{B}}$ et de $\overline{\mathbf{C}}$.

$\overline{B \cdot C} = \overline{B} + \overline{C}$

VI - 3 - Paul est-il heureux ?

Paul est heureux dans les conditions suivantes : lorsqu'il écoute de la musique et qu'il lit, ou bien lorsqu'il travaille en écoutant de la musique, ou encore lorsqu'il lit et qu'il ne travaille pas.
On définit 4 variables logiques de la manière suivant :

- A = 1 si Paul lit
- B = 1 si Paul travaille
- C = 1 si Paul écoute de la musique
- H = 1 lorsque Paul est heureux

1 - Donnez l'équation logique de H (en fonction de A, B, et C), traduisant les données du problème.

$H = C \cdot A + B \cdot C + A \cdot \overline{B}$

2 - Complétez la table de vérité de H ci-contre.

A	B	C	H
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

3 - À partir de cette table de vérité, dégagez une nouvelle équation de H.

$H = \overline{A}BC + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C + ABC$

4 - Simplifiez cette nouvelle équation de H en utilisant les propriétés de l'algèbre de Boole $H = BC + A\overline{B}$

5 - D'après l'équation simplifiée de H, à quelles conditions Paul est-il heureux ? Ces conditions sont-elles équivalentes à celles énoncées dans le texte au début du problème ?

6 - Déduisez de ce problème une nouvelle propriété de l'Algèbre de Boole.

$CA + BC + A\overline{B} = BC + A\overline{B}$

Correction scannée et imprimée le 18 février 2012