

## Exercices d'application de l'algèbre de Boole

 Domaine d'application :  
**Les systèmes logiques**

 Type de document :  
**Exercice**

 Classe :  
**Première**

Date :

### I - Équations logiques, tables de vérité, et algèbre de Boole

**I - 1** - On donne l'équation logique suivante :  $S = \overline{A+B}$ 

Cette équation correspond à la sortie de quelle fonction logique ? .....

1 - Complétez la table de vérité de S à partir de son équation :	2 - D'après cette table de vérité, donnez une nouvelle équation logique de S : .....															
<table border="1" style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="padding: 2px 5px;">A</th> <th style="padding: 2px 5px;">B</th> <th style="padding: 2px 5px;">S</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td style="padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;"></td></tr> <tr><td style="padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;">1</td><td style="padding: 2px 5px;"></td></tr> <tr><td style="padding: 2px 5px;">1</td><td style="padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;"></td></tr> <tr><td style="padding: 2px 5px;">1</td><td style="padding: 2px 5px;">1</td><td style="padding: 2px 5px;"></td></tr> </tbody> </table>	A	B	S	0	0		0	1		1	0		1	1		3 - En déduire une propriété de l'algèbre de Boole : .....
A	B	S														
0	0															
0	1															
1	0															
1	1															

**I - 2** - On donne l'équation logique suivante :  $S = \overline{A.B} + \overline{A}.B + A.\overline{B}$ 

1 - Complétez la table de vérité de S à partir de son équation :	2 - D'après la table de vérité, reconnaissez-vous une fonction logique particulière ? Donnez une nouvelle équation de S : .....															
<table border="1" style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="padding: 2px 5px;">A</th> <th style="padding: 2px 5px;">B</th> <th style="padding: 2px 5px;">S</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td style="padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;"></td></tr> <tr><td style="padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;">1</td><td style="padding: 2px 5px;"></td></tr> <tr><td style="padding: 2px 5px;">1</td><td style="padding: 2px 5px;">0</td><td style="padding: 2px 5px;"></td></tr> <tr><td style="padding: 2px 5px;">1</td><td style="padding: 2px 5px;">1</td><td style="padding: 2px 5px;"></td></tr> </tbody> </table>	A	B	S	0	0		0	1		1	0		1	1		3 - En déduire une nouvelle propriété de l'algèbre de Boole : .....
A	B	S														
0	0															
0	1															
1	0															
1	1															

Démontrez cette égalité en utilisant les propriétés de l'algèbre de Boole :

1 $S = \overline{A.B} + \overline{A}.B + A.\overline{B}$	5 S = .....
2 S = .....	6 S = .....
3 S = .....	7 S = .....
4 S = .....	8 S = .....

**I - 3** - On donne l'équation logique suivante :  $S = \overline{A}.B + A.\overline{B} + A.B$ 

1 - Complétez sur la page 2 la table de vérité de S à partir de son équation.

2 - D'après la table de vérité, reconnaissez-vous une fonction logique particulière ? Donnez alors une nouvelle équation de S :

S = .....

A	B	S
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

3 - En déduire une nouvelle propriété de l'algèbre de Boole :  
.....

Démontrez cette égalité en utilisant les propriétés de l'algèbre de Boole :

1	$S = \bar{A}.B + A.\bar{B} + A.B$	5	S = .....
2	S = .....	6	S = .....
3	S = .....	7	S = .....
4	S = .....	8	S = .....

**I - 4** - On donne l'équation logique suivante :  $S = [A + B] + [A.B]$

1 - Complétez la table de vérité de S à partir de son équation :	2 - D'après la table de vérité, reconnaissez-vous une fonction logique particulière ? Donnez une nouvelle équation de S : .....															
<table border="1"> <thead> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>S</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td></td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td></td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	A	B	S	0	0		0	1		1	0		1	1		3 - En déduire une nouvelle propriété de l'algèbre de Boole : .....
A	B	S														
0	0															
0	1															
1	0															
1	1															

Démontrez cette égalité en utilisant les propriétés de l'algèbre de Boole :

1	$S = [A + B] + [A.B]$	5	S = .....
2	S = .....	6	S = .....
3	S = .....	7	S = .....
4	S = .....	8	S = .....

## II - Simplification d'équations

Simplifiez les équations logiques suivantes en utilisant les propriétés de l'algèbre de Boole et en précisant clairement le nom de la propriété utilisée à chaque transformation :

**II - 1** -  $W = [A.B + C + D].A.B = ?$

**II - 2** -  $X = [\bar{B} + \bar{A}].[A.C + \bar{B}] = ?$

**II - 3** -  $Y = C.[B + C] + [A + D].[\bar{A} + D].\bar{C} = ?$

**II - 4** -  $Z = A.C.[\bar{A} + B + \bar{C}] = ?$

### III - Construction de la table de vérité et du logigramme à partir d'une équation

On donne l'équation de la sortie S d'un système logique à 3 entrées :

$$S = A \cdot \bar{B} \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C$$

III - 1 - Complétez la table de vérité de S.

III - 2 - Proposez un logigramme correspondant à l'équation **non simplifiée** de S.

III - 3 - Simplifiez au maximum l'équation de S en utilisant les propriétés de l'algèbre de Boole.

III - 4 - Proposez un nouveau logigramme correspondant à l'équation **simplifiée** de S.

A	B	C	S
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

### IV - Étude d'une fonction logique à partir de son équation

On donne l'équation de la sortie H d'un système logique à 3 entrées :

$$H = \bar{X} \cdot Y \cdot \bar{Z} + (\bar{X} + Y) \cdot (Y + X) + (X + Z) \cdot \bar{Z}$$

IV - 1 - Simplifiez au maximum l'équation de H en utilisant les propriétés de l'algèbre de Boole.

IV - 2 - Complétez la table de vérité de H à partir de son équation simplifiée.

IV - 3 - Proposez un logigramme correspondant à l'équation **simplifiée** de H, en utilisant seulement 3 portes logiques.

X	Y	Z	H
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

### V - Étude d'une fonction logique à partir de sa table de vérité

On donne la table de vérité de la sortie G d'un système logique à 3 entrées R, S, et T :

V - 1 - A partir de cette table de vérité, dégagez une équation logique de la sortie G.

V - 2 - Simplifiez cette équation en utilisant les propriétés de l'algèbre de Boole.

V - 3 - Proposez un logigramme de G en utilisant seulement 4 portes logiques.

R	S	T	G
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

## VI - Problèmes de logique

### VI - 1 - Défense de fumer ou cracher :

Dans la cour de son lycée, Paul a lu sur le panneau d'affichage « **Défense de fumer ou cracher** ». On associe l'autorisation de « **fumer** » à la variable logique **F**, et l'autorisation de « **cracher** » à la variable logique **C**. L'interdiction de fumer s'écrit donc  $\bar{F}$ , et l'interdiction de cracher s'écrit  $\bar{C}$ .

- 1 - Le panneau « **Défense de fumer ou cracher** » exprime 2 interdictions distinctes. Lesquelles ? Utilisez les termes « **il est interdit de** » ainsi que « **et** » dans votre réponse.
- 2 - Comment écrire « **Défense de fumer ou cracher** » en fonction de **C** et de **F** ?
- 3 - Comment écrire « **Défense de fumer ou cracher** » en fonction de  $\bar{C}$  et de  $\bar{F}$  ?
- 4 - Déduire de ce problème une propriété de l'algèbre de Boole exprimant  $\overline{C+F}$  en fonction de  $\bar{C}$  et de  $\bar{F}$ .

☹ ☹ ☹ ☹ ☹ ☹ ☹ ☹ ☹ ☹ ☹

### VI - 2 - Boire ou conduire, il faut choisir :

En allant passer son permis de conduire, Paul a lu sur la porte de l'auto-école « **Il est interdit de boire et conduire** ». On associe l'autorisation de « **boire** » à la variable logique **B**, et l'autorisation de « **conduire** » à la variable logique **C**.

- 1 - Comment écrire « **Il est interdit de boire et conduire** » en fonction de **B** et de **C** ?
- 2 - Comment écrire « **Il est interdit de boire et conduire** » en fonction de  $\bar{B}$  et de  $\bar{C}$  ?
- 3 - Déduire de ce problème une propriété de l'algèbre de Boole exprimant  $\overline{B.C}$  en fonction de  $\bar{B}$  et de  $\bar{C}$ .

☹ ☹ ☹ ☹ ☹ ☹ ☹ ☹ ☹ ☹ ☹

### VI - 3 - Paul est-il heureux ?

Paul est heureux dans les conditions suivantes : lorsqu'il écoute de la musique et qu'il lit, ou bien lorsqu'il travaille en écoutant de la musique, ou encore lorsqu'il lit et qu'il ne travaille pas. On définit 4 variables logiques de la manière suivant :

- \* A = 1 si Paul lit
- \* B = 1 si Paul travaille
- \* C = 1 si Paul écoute de la musique
- \* H = 1 lorsque Paul est heureux

1 - Donnez l'équation logique de H [en fonction de A, B, et C], traduisant les données du problème.

2 - Complétez la table de vérité de H ci-contre.

3 - À partir de cette table de vérité, dégagez une nouvelle équation de H.

4 - Simplifiez cette nouvelle équation de H en utilisant les propriétés de l'algèbre de Boole

5 - D'après l'équation simplifiée de H, à quelles conditions Paul est-il heureux ? Ces conditions sont-elles équivalentes à celles énoncées dans le texte au début du problème ?

6 - Déduisez de ce problème une nouvelle propriété de l'Algèbre de Boole.

A	B	C	H
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	