CORRECTION

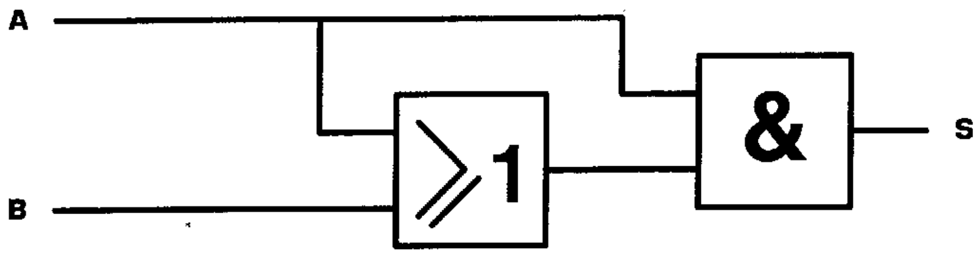
Section : *S*	Option : *Sciences de l'ingénieur*	Discipline : *Génie Électrique*

Constatation des théorèmes de l'algèbre de Boole

Domaine d'application : **Algèbre de Boole**	Type de document : **Cours**	Classe : **Première**	Date :

I – Constatation du théorème d'absorption

I - 1 – Étudions le *logigramme 1* :



Logigramme 1

L'équation de la sortie S du *logigramme 1* est :

S = $A \cdot (A + B)$

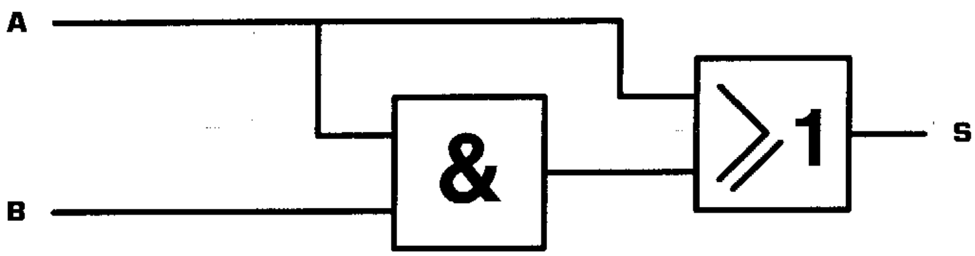
A	B	S
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

La table de vérité du *logigramme 1*cest donnée ci-contre.

En comparant les valeurs de S et de A, on en déduit une nouvelle propriété de l'algèbre de Boole :

$$A \cdot (A + B) = A$$

I - 2 – On étudie maintenant le *logigramme 2* :



Logigramme 2

L'équation de la sortie S du *logigramme 2* est :

S = $A + A \cdot B$

A	B	S
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

La table de vérité du *logigramme 2* est donnée ci-contre.

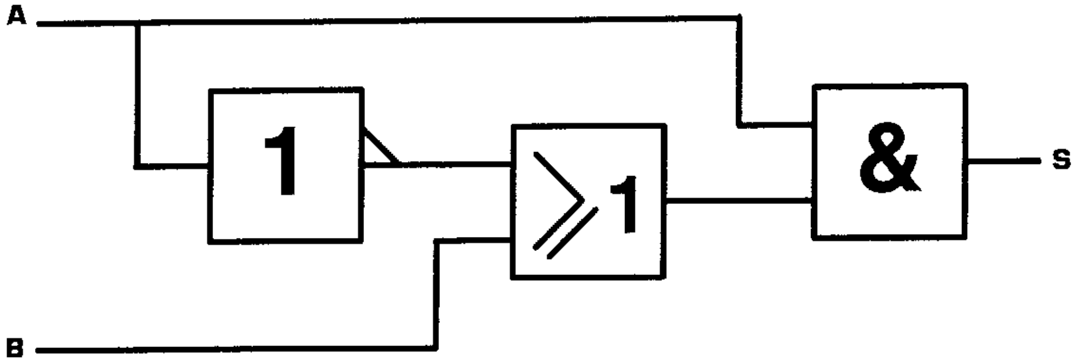
En comparant les valeurs de S et de A, on en déduit une nouvelle propriété de l'algèbre de Boole :

$$A + A \cdot B = A$$

Les deux nouvelles propriétés, constatées sur les logigrammes 1 et 2, s'appellent ***le théorème d'absorption***.

II - Constatation du théorème d'allègement

II - 1 - Étudions le *logigramme 3* :



Logigramme 3

L'équation de la sortie S du *logigramme 3* est :

S = $A \cdot (\overline{A} + B)$

A	B	S
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

La table de vérité du *logigramme 3* est donnée ci-contre.

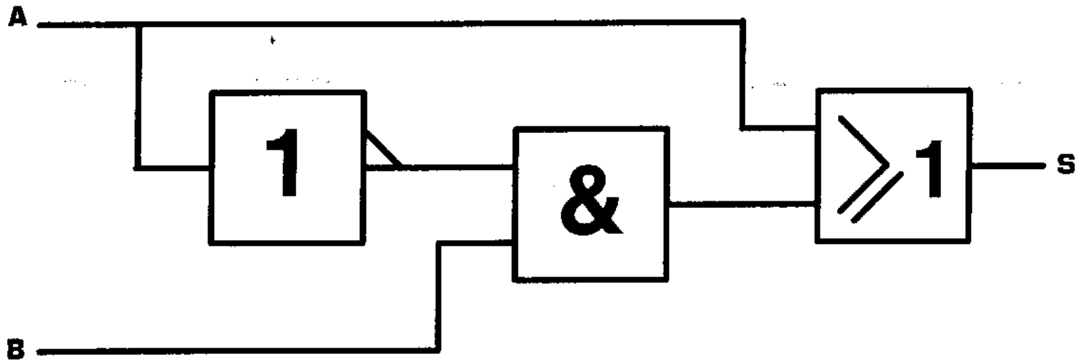
On reconnaît la table de vérité de la fonction logique ET

Une autre équation de la sortie S est donc **S =** $A \cdot B$

A partir des 2 équations de S, on en déduit une nouvelle propriété de l'algèbre de Boole :

$$A \cdot (\overline{A} + B) = A \cdot B$$

II - 2 - On étudie maintenant le *logigramme 4* :



Logigramme 4

L'équation de la sortie S du *logigramme 4* est :

S = $A + \overline{A} \cdot B$

A	B	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

La table de vérité du *logigramme 4* est donnée ci-contre.

On reconnaît la table de vérité de la fonction logique OU

Une autre équation de la sortie S est donc **S =** $A + B$.

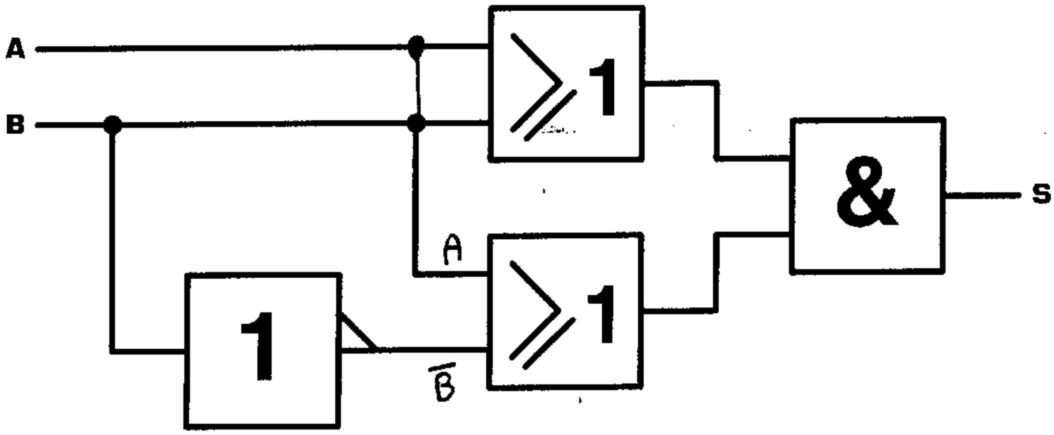
A partir des 2 équations de S, on en déduit une nouvelle propriété de l'algèbre de Boole :

$$\boxed{A + \overline{A} \cdot B = A + B}$$

Les deux nouvelles propriétés, constatées sur les logigrammes 3 et 4, s'appellent ***le théorème d'allègement***.

III - Constatation du théorème d'inclusion

III - 1 - Étudions le *logigramme 5* :



Logigramme 5

L'équation de la sortie S du *logigramme 5* est :

S = $(A + B) \cdot (A + \overline{B})$

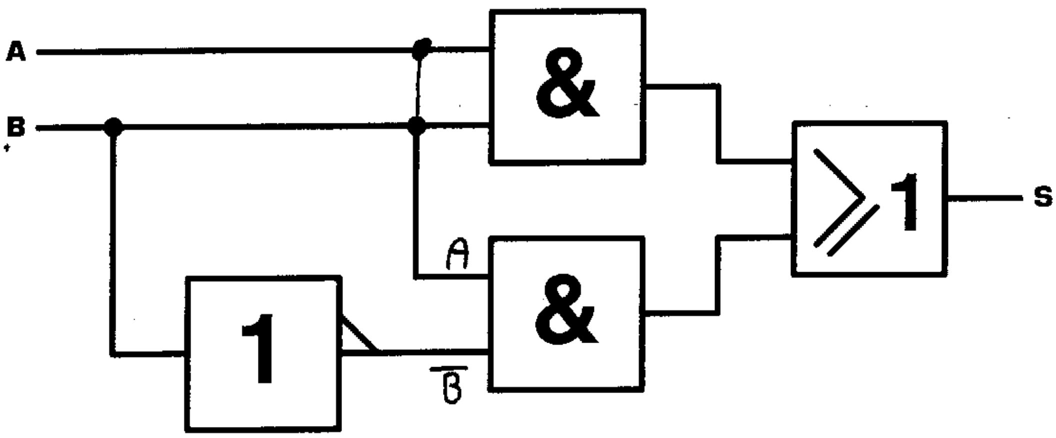
La table de vérité du *logigramme 5* est donnée ci-contre.

A	B	S
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

En comparant les valeurs de S et de A, on en déduit une nouvelle propriété de l'algèbre de Boole :

$$\boxed{(A + B) \cdot (A + \overline{B}) = A}$$

III - 2 - On étudie maintenant le *logigramme 6* :



Logigramme 6

L'équation de la sortie S du *logigramme 6* est :

S = $A.B + A.\overline{B}$

A	B	S
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

La table de vérité du *logigramme 6* est donnée ci-contre.

En comparant les valeurs de S et de A, on en déduit une nouvelle propriété de l'algèbre de Boole :

$$\boxed{A.B + A.\overline{B} = A}$$

Les deux nouvelles propriétés, constatées sur les logigrammes 5 et 6, s'appellent ***le théorème d'inclusion***.

IV - Démonstration des 3 théorèmes par l'algèbre de Boole

Voici maintenant la démonstration des 3 théorèmes, en utilisant les propriétés de base de l'algèbre de Boole. On constate que le théorème le plus simple à démontrer par un logigramme [***l'absorption***] est le plus délicat à démontrer par l'algèbre de Boole, et inversement, le théorème utilisant le logigramme le plus compliqué [***l'inclusion***] est le plus facile à démontrer par l'algèbre de Boole :

Démonstration du théorème d'inclusion	
1ère forme	2ème forme
$(A+B).(A+\overline{B}) = A + B.\overline{B}$	$A.B + A.\overline{B} = A.(B+\overline{B})$
$= A + 0$	$= A.1$
$= A$	$= A$

Démonstration du théorème d'allègement	
1ère forme	2ème forme
$A.(\overline{A}+B) = A.\overline{A} + A.B$	$A + \overline{A}.B = (A+\overline{A}).(A+B)$
$= 0 + A.B$	$= 1.(A+B)$
$= A.B$	$= A+B$

Démonstration du théorème d'absorption	
1ère forme	2ème forme
$A.(A+B) = (A+0).(A+B)$	$A + A.B = A.1 + A.B$
$= A + 0.B$	$= A.(1+B)$
$= A + 0$	$= A.1$
$= A$	$= A$

Correction scannée et imprimée le 17 février 2012